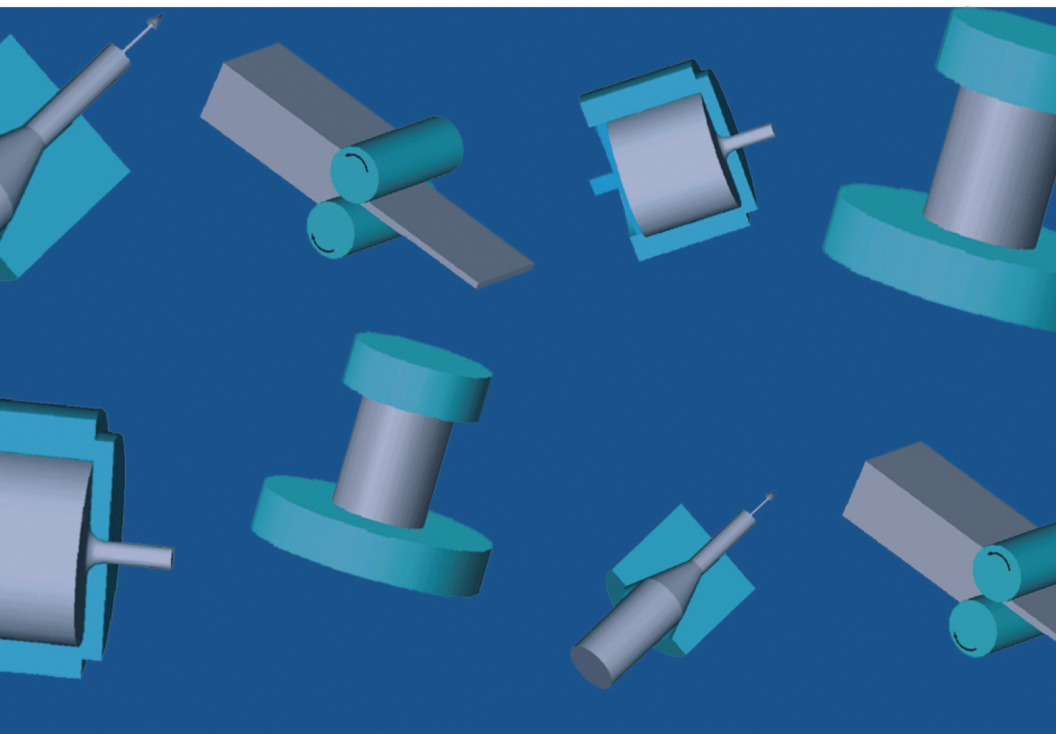


# FUNDAMENTOS DA CONFORMAÇÃO

2ª Edição

## MECÂNICA DOS METAIS



Paulo Roberto Cetlin  
Horacio Helman

Horacio Helman  
Paulo Roberto Cetlin

# FUNDAMENTOS DA CONFORMAÇÃO MECÂNICA DOS METAIS

2ª edição

**Artliber**  
EDITORA

Copyright© 2005 by Artliber Editora Ltda.  
Copyright© 2010 by Artliber Editora Ltda.  
1ª edição 1983 - Editora Guanabara Dois SA  
1ª reimpressão 2012  
2ª reimpressão 2013  
3ª reimpressão 2015

Revisão:

*Rosa Szymanski*

Capa e Composição eletrônica:

*Espaço Editorial*

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro)**

---

Helman, Horacio

Fundamentos da conformação mecânica dos metais /  
Horacio Helman, Paulo Roberto Cetlin. -- 2. ed. -- São Paulo:  
Artliber Editora, 2015.

Bibliografia.

1. Metais - conformação 2. Metais - Propriedades mecânicas  
I. Cetlin, Paulo Roberto. II. Título.

15-2407

CDD-671.3

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Conformação mecânica: Metais: Tecnologia 671.3
2. Metais: Conformação mecânica: Tecnologia 671.3

2015

Todos os direitos desta edição reservados à

**Artliber Editora Ltda**

Av. Diógenes Ribeiro de Lima, 3294

05083-010 – São Paulo – SP

Tel.: (11) 3643-0300 Fax.: (11) 3643-0309

info@artliber.com.br

www.artliber.com.br

# SUMÁRIO

## 1 - Tensões e deformações

1.1 - Introdução: colocação do problema .....	15
1.2 - Conceito de tensão em um ponto .....	17
1.3 - Variação da tensão com o plano de corte .....	20
1.4 - Tensões principais .....	23
1.5 - Círculos de Mohr .....	25
1.6 - Aplicações dos círculos de Mohr .....	31
1.7 - A deformação linear .....	34
1.8 - A deformação por cisalhamento .....	37
1.9 - A variação da deformação com a direção .....	38
1.10 - Deformações principais .....	39
1.11 - Deformação volumétrica .....	40
Exercícios .....	41

## 2 - Elasticidade e plasticidade

2.1 - Introdução .....	45
2.2 - Relações tensão-deformação no regime elástico .....	45
2.3 - Critérios para início da deformação plástica de metais .....	52
2.4 - Relações tensão-deformação no regime plástico .....	58
Exercícios .....	69

<b>3 - Atrito e lubrificação</b>	
3.1 - Introdução .....	73
3.2 - Características da força de atrito .....	74
3.3 - Lubrificação .....	80
3.4 - Valores indicativos do coeficiente de atrito .....	86
<b>4 - Fatores metalúrgicos na conformação mecânica dos metais</b>	
4.1 - Introdução .....	89
4.2 - Influência da temperatura em processos de conformação mecânica de metais .....	89
4.3 - A Influência da velocidade de deformação em processos de conformação mecânica de metais .....	93
4.4 - Influência das variáveis metalúrgicas em processos de conformação mecânica de metais .....	96
4.5 - Formabilidade dos metais .....	99
Exercícios .....	101
<b>5 - Métodos Analíticos para a solução de problemas na conformação mecânica de metais</b>	
5.1 - Introdução .....	103
5.2 - Método de deformação homogênea .....	105
5.3 - Método dos blocos .....	108
5.4 - Método do limite superior .....	112
5.5 - Outros métodos .....	117
<b>6 - Trefilação e extrusão</b>	
6.1 - O processo de trefilação .....	119
6.2 - Análise do processo de trefilação de barras de secção circular .....	120
6.3 - O processo de extrusão .....	143
Exercícios .....	151

## **7 - Forjamento**

7.1 - A operação e o equipamento .....	153
7.2 - A deformação do metal no estiramento por forjamento – tensões induzidas .....	163
7.3 - Cálculo de esforços no forjamento no estado plano de deformações e no forjamento de cilindros .....	173
Exercícios .....	190

## **8 - Laminação**

8.1 - A laminação de metais .....	193
8.2 - Relações geométricas na laminação de planos .....	199
8.3 - Deformação na laminação .....	201
8.4 - Condições de mordida e arrastamento da chapa pelos cilindros de laminação .....	204
8.5 - Ângulo de deslizamento nulo ou ângulo neutro .....	207
8.6 - Comparação com forjamento de cilindros .....	212
8.7 - Deformação elástica dos cilindros de laminação .....	213
8.8 - Cálculo da carga de laminação de chapas a frio .....	215
8.9 - Deformação elástica de um laminador .....	228
8.10 - Chapa de espessura mínima .....	231
8.11 - Flexão dos cilindros de laminação .....	233
8.12 - Variáveis na laminação a frio e espessura final da chapa .....	235
8.13 - Controle dimensional .....	239
8.14 - Velocidade de deformação .....	241
8.15 - Laminação a quente .....	245
8.16 - Torque e potência na laminação de chapas .....	250
8.17 - Geometria de fluxo e tensões induzidas na laminação .....	253
Exercícios .....	258

<b>Referências bibliográficas .....</b>	<b>261</b>
---	------------

# **5 - MÉTODOS ANALÍTICOS PARA O CÁLCULO DE ESFORÇOS NA CONFORMAÇÃO MECÂNICA DE METAIS**

## **5.1 - Introdução**

A área da engenharia denominada em termos gerais “conformação mecânica” tem por objetivo a análise dos processos de fabricação de peças por meio de deformação plástica. Dentro dessa área, é importante o estudo dos estados de tensões a que deve ser submetido um material para nele produzir as deformações necessárias a fim de que adquira determinadas dimensões finais. Nessa análise intervêm diferentes variáveis de natureza mecânico-metalúrgica tanto do material a ser deformado como do processo a que será submetido.

Um dos objetivos da análise de processos de conformação mecânica é a determinação dos esforços externos a serem aplicados aos metais, necessários para as diferentes etapas pelas quais passa o produto até alcançar as dimensões finais.

Esse conhecimento permite chegar a um dimensionamento racional (e econômico) de uma instalação de processamento ou à otimização da operação de equipamentos já existentes. Por outro lado, é função da teoria de conformação mecânica fornecer elementos necessários para que se possa fazer uma seleção razoável dos equipamentos necessários para tornar exequível um projeto, assim como planejar a

forma de sua utilização (seqüência de passes, operações complementares, etc), para se obter, por exemplo, produtividade máxima.

O conhecimento das tensões que atuam no material durante a conformação, da geometria do fluxo, do grau de deformação, etc., constitui valiosa ajuda na análise de possíveis causas de defeitos, fraturas, etc., e permite prescrever formas de evitar tais inconvenientes.

O problema de relacionar tensões e deformações em um corpo real é complexo e, freqüentemente, de difícil resolução. Sua definição matemática envolve vários níveis de abstrações científicas e aproximações da realidade. Geralmente, o problema se resume na solução de sistemas de equações diferenciais (ordinárias, parciais, lineares, não-lineares), independentemente da natureza física do problema ou de sua característica mecânica dominante (elasticidade, plasticidade, etc.). Na maioria dos casos, a resolução destas equações apresenta grande dificuldade matemática e, freqüentemente, é quase impossível obter a solução exata (que não significa determinação exata das tensões e deformações em um problema real). Este fato está relacionado com as características matemáticas (não-linearidade) de algumas equações constitutivas e com a dificuldade de satisfazer certas condições de contorno.

Neste capítulo serão estudadas distintas maneiras de abordar o estudo dos processos de conformação mecânica com os recursos fornecidos pela mecânica do contínuo. Dependendo do caso, os problemas em conformação mecânica são definidos em termos de cargas, forças de volume (peso, inércia, etc.), propriedades físicas do material, distribuição inicial de tensões e deformações, temperaturas, pressões, etc. Essas variáveis são relacionadas num determinado modelo matemático, obtido segundo diversos procedimentos que serão descritos a seguir. Foram selecionados os métodos de apli-



cação mais direta ou cujo emprego não necessita de recursos avançados de computação e análise numérica.

A prática da conformação mecânica baseou-se principalmente no método empírico e o *know-how* tem sido tradicionalmente o método para resolver problemas. Essa forma de trabalho é satisfatória, desde que os problemas a resolver estejam compreendidos dentro da experiência do pesquisador. No entanto, os resultados empíricos, apesar de úteis na operação, não levam necessariamente a respostas para novos problemas. Esta situação pode ser melhorada pela aplicação da mecânica do contínuo à conformação mecânica, constituindo assim uma disciplina de interesse na indústria moderna.

## 5.2 - Método de deformação homogênea

Um método simples de deformar um metal é a tração pura. A totalidade do corpo de prova neste processo (desprezando os extremos) está livre para se deformar, sem que nenhuma restrição lhe seja imposta externamente. Desse modo, até o instante em que começa a estrição, a barra sofre deformação uniforme ou homogênea. É comum considerar que este modo de deformação requer menos energia (e, conseqüentemente, cargas menores) que qualquer outro tipo de deformação. Esta energia pode ser calculada através do conhecimento da curva tensão-deformação, como será visto a seguir.

Nos itens 2.2.4 e 2.3.1 foi demonstrado que a energia por unidade de volume necessária para a deformação uniaxial por tração de uma barra de um metal sem deformação inicial é expressa por:

$$U_0 = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon$$

Através de um raciocínio análogo ao utilizado no item 2.2.4, pode-se obter uma equação similar à anterior em função da deformação logarítmica  $\epsilon$ . Admitindo-se que a tensão

aplicada coincide instante a instante com a tensão de escoamento  $Y$ , a energia despendida por unidade de volume será:

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_f} Y d\epsilon \quad (5.1)$$

Conclui-se que a área do diagrama  $Y - \epsilon$ , compreendida entre 0 e  $\epsilon_f$  (Figura 5.1), mede o trabalho por unidade de volume necessário para a deformação homogênea da barra até  $\epsilon_f$ . Embora o raciocínio tenha sido feito com base no processo de tração, ele é válido para o processo de compressão, desde que seja aceita a ausência de atrito entre as matrizes de compressão e a barra.

A curva  $Y - \epsilon$  é obtida como discutido no Capítulo 2 (Comportamento sob tração) e 4 (Influência da temperatura e velocidade de deformação).

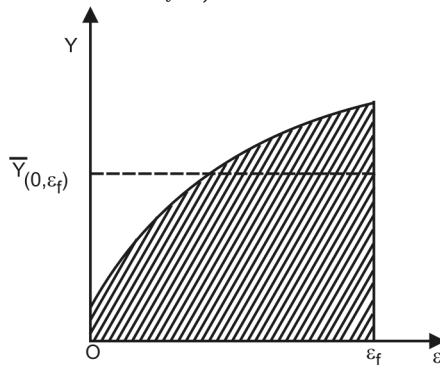


Figura 5.1 - Relação tensão-deformação logarítmica

Se o material for “não-encruável” ( $Y = \text{cte}$ ), ou no caso de operar-se com um valor médio  $\bar{Y}$  da tensão de escoamento, a expressão (5.1) pode ser escrita como:

$$U_0 = \bar{Y} \int_0^{\epsilon_f} d\epsilon = \bar{Y} \epsilon_f = \bar{Y} \ln \frac{l_f}{l_i} \quad (5.2)$$

onde  $l_f$  e  $l_i$  são os comprimentos final e inicial, respectivamente, da barra sob tração. Conseqüentemente, o tra-

balho despendido para deformar homogeneamente um volume  $V$  será:

$$U = V \int_0^{\varepsilon_f} Y(\varepsilon) d\varepsilon = V \bar{Y} \ln \frac{l_f}{l_i} \quad (5.3)$$

A tensão de escoamento média  $\bar{Y}$  é definida como:

$$\bar{Y}(0, \varepsilon_f) = \frac{1}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} Y d\varepsilon \quad (5.4)$$

e seu significado geométrico pode ser deduzido da Figura 5.1: altura do retângulo de base  $\varepsilon_f$  e de área igual à encerrada pela curva  $Y - \varepsilon$  entre 0 e  $\varepsilon_f$ .

Como uma aplicação, este método será empregado para calcular a tensão  $\sigma_f$  a ser aplicada na extremidade de uma tira submetida a trefilação, desde um comprimento e área iniciais  $l_i$  e  $A_i$ , respectivamente, até um comprimento e área finais  $l_f$  e  $A_f$  (Figura 5.2a).

Aplicando a equação (5.3) a este caso, considerando um material que não endureça (ou operando com um valor médio da tensão de escoamento) e condições de deformação homogênea em todo o volume  $V$ , obtém-se:

$$U = \sigma_f (A_f l_f) = V \bar{Y} \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon$$

Como o volume da tira permanece constante durante o processo de deformação, obtém-se:

$$\sigma_f = \bar{Y} \ln \frac{l_f}{l_i} = \bar{Y} \ln \frac{A_i}{A_f} \quad (5.5)$$

Na análise que conduz à equação (5.5), além da hipótese de deformação homogênea, foram desprezados os efeitos da fricção (analisados no Capítulo 3).

Este método pode ser aplicado a outros processos como forjamento, extrusão e laminação. É necessário destacar que, em processos reais, onde não ocorre deformação homogê-

nea, os valores calculados desta forma constituem mera primeira aproximação. A discrepância com os valores medidos aumentam com a incidência de fatores que afastam o processo das condições ideais de deformação homogênea. É freqüente tentar corrigir estas discrepâncias por meio de coeficientes que consideram a incidência destes fatores, mas, neste caso, o método passa a ser de natureza semi-empírica.

### 5.3 - Método dos blocos

O método dos blocos (*slab method*) é um sistema teórico para análise de processos de conformação mecânica, baseado em certas hipóteses simplificadoras que permitem uma descrição simples destes processos. Para sua utilização, será suposto que as direções principais das tensões, em todos os pontos do corpo que está sendo deformado, podem ser consideradas como um sistema coordenado de referência. Dessa forma, o estado de tensão atuante no corpo é tal que as tensões variam predominantemente em uma direção, e podem ser consideradas uniformes nas outras. Além disso, admite-se que o efeito do atrito está confinado a uma pequena zona na interface de contato com a matriz. Então, o estado de tensões tangenciais produzidos pode ser superposto ao interior, sem alterar as direções principais, que permanecem basicamente as mesmas. O atrito é levado em conta como exposto no Capítulo 3.

A aplicação das equações de equilíbrio em um bloco nas condições assinaladas conduz, geralmente, a uma equação diferencial da forma:

$$\frac{d\sigma_{x_i}}{dx_i} + \frac{1}{X_i} F(\sigma_{x_i}, \sigma_{x_j}) = 0 \quad (5.6)$$

onde  $x_i$  é a coordenada correspondente à direção na qual as tensões variam predominantemente, enquanto  $(\sigma_{x_i}, \sigma_{x_j})$

são as tensões principais correspondentes às direções  $x_i$  e  $x_j$ . A função  $F(\sigma_{x_i}, \sigma_{x_j})$  é linear em  $(\sigma_{x_i}, \sigma_{x_j})$  e inclui o efeito do atrito e a incidência dos parâmetros geométricos do processo. O efeito do encruamento pode ser levado em consideração na integração da equação diferencial, a qual pode eventualmente não admitir uma solução analítica, devendo então ser resolvida numericamente.

É importante observar que, apesar de a equação (5.6) ser obtida a partir de hipóteses de equilíbrio, na zona de deformação não existem tais condições. Entretanto, para a maioria dos processos industriais, pode-se aceitar esta hipótese como válida, sem introduzir grandes erros no modelo.

Equações da forma indicada apresentam-se em processos de deformação plana (por exemplo, laminação de chapas) e em processos com simetria axial, tais como a trefilação e extrusão, entre outros.

Apesar de o método basear-se num estado de tensões fictício, os resultados obtidos com sua aplicação constituem freqüentemente uma aproximação razoável para a solução de uma ampla gama de problemas.

Como exemplo de utilização deste método, será analisado um processo de trefilação plana de tiras através de uma matriz sem atrito. O ângulo total da matriz é  $2\alpha$  e as outras dimensões encontram-se na Figura 5.2a. Supõe-se que a espessura inicial da tira  $h_1$  é muito menor que sua largura  $w$ , situação esta que assegura condições de deformação plana, ou seja, não ocorrerá deformação no sentido da largura.

Para aplicar o método, isola-se um bloco do metal que se encontra passando pela matriz, indicando as tensões que atuam sobre ele, como está detalhado na Figura 5.2b, junto com as suas dimensões. Tais tensões são:

- 1) a tensão longitudinal  $\sigma_x$ , que será considerada do-

minante, variando na direção  $x$ , mas constante em cada seção transversal;

2) a tensão vertical  $\sigma_y$ , devida à pressão na matriz,  $p$ .

Como indicado anteriormente, as tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  serão consideradas principais.

O equilíbrio das forças, na direção  $x$  do elemento isolado, contém duas componentes;

a) devido às tensões longitudinais.

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh) w - \sigma_x h w$$

b) devido à pressão da matriz nas duas interfaces.

$$2p \left( w \frac{dx}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha$$

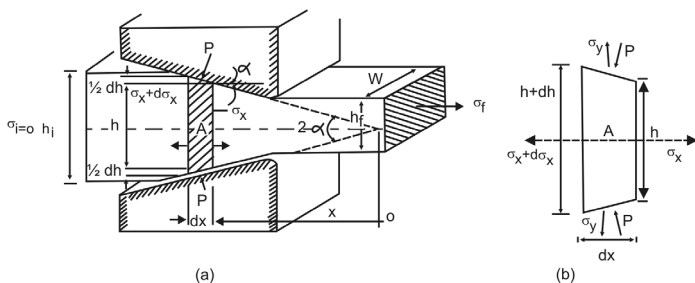


Figura 5.2 - Esquema de trelição plana para sua análise pelo método dos blocos

A condição de equilíbrio ( $\sum F_x = 0$ ) estabelece:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh)w - \sigma_x h w + 2pw \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha = 0$$

Desenvolvendo-se esta expressão e desprezando-se o produto de infinitésimos, obtém-se:

$$\sigma_x dh + hd\sigma_x + 2p \operatorname{tg} \alpha dx = 0 \quad (5.7)$$

Devido às relações

$$x = \frac{h}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad \text{e} \quad dx = \frac{dh}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

a expressão (5.7) transforma-se em:

$$\sigma_x dh + x d\sigma_x + p dx = 0$$

ou ainda

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{1}{x} (\sigma_x + p) = 0 \quad (5.8)$$

Esta equação é da forma característica das equações diferenciais produzidas por este método. É possível relacionar  $\sigma_x$  e  $p$  através do critério de von Mises, que, para estado plano de deformação, estabelece:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y = S$$

No problema analisado,  $\sigma_1 = \sigma_x$  e, para os ângulos geralmente empregados em trefilação, aceita-se  $\sigma_y \approx -p$ . Então, o critério de escoamento transforma-se em:

$$\sigma_x + p = S$$

e, substituindo em (5.8), obtém-se:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{S}{x} = 0$$

Para facilitar a integração,  $h$  será considerada como a variável independente; realizando-se a mudança de variável correspondente, a expressão anterior será escrita como:

$$\frac{d\sigma_x}{dh} + \frac{S}{h} = 0 \quad (5.9)$$

A equação (5.9) será integrada considerando uma tensão média de escoamento  $\bar{S}$  (constante); assim, obtém-se:

$$\sigma_x = \bar{S} \ln h + cte$$

A constante de integração é calculada através da condição de contorno:

para  $h = h_1$ , tem-se  $\sigma_1 = 0$

e, com ela, obtém-se:

$$\sigma_x = \bar{S} \ln \frac{h_i}{h}$$

Conseqüentemente, a tensão de saída será:

$$\sigma_f = \bar{S} \ln \frac{h_i}{h_f} \quad (5.10)$$

ou, em termos de áreas e da tensão de escoamento em tração simples:

$$\sigma_f = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{Y} \ln \frac{A_i}{A_f} \quad (5.11)$$

Observe-se que o resultado obtido através do cálculo baseado no método dos blocos, sem considerar o efeito do atrito, difere do conseguido por meio do método da deformação homogênea no fator  $2/\sqrt{3}$  (aproximadamente 15%). Posteriormente, o processo de trefilação será analisado incluindo a existência de fricção e para materiais endurecíveis(\*).

Freqüentemente, os valores calculados por este método são sensivelmente inferiores aos reais, devido às hipóteses simplificadoras efetuadas. Entretanto, ele constitui uma ferramenta particularmente útil para a análise da influência que as alterações nos parâmetros do processo exercem sobre os esforços de conformação.

#### 5.4 - Método do limite superior (*upper bound*)

O método dos blocos, analisado anteriormente, fundamenta-se na obtenção de um estado de tensões que satisfaça às condições de equilíbrio. No método do limite superior, o objetivo principal é encontrar uma geometria de fluxo, expressa através de um campo de velocidades, que descreva

\* Endurecível: termo usualmente empregado pelos profissionais da área para designar as características de um material que permitem o aumento de sua resistência mecânica, por deformação plástica.



cinematicamente o processo em estudo. As únicas restrições impostas ao campo de velocidades são as de satisfazer a condição de incompressibilidade (volume constante) e que descontinuidades na velocidade de fluxo ocorram somente tangenciais (nunca normais) aos limites do campo. Ao campo com estas características denomina-se “campo de velocidades cinematicamente admissível” e seu significado físico ficará claro nos exemplos seguintes.

O presente método baseia-se num teorema da mecânica do contínuo denominado “teorema do limite superior”, que estabelece:

*Existindo um campo de velocidades cinematicamente admissível, as cargas necessárias para a implantação deste campo constituem um limite superior para a solução real.*

Obviamente, existem vários campos de velocidades possíveis para a descrição aproximada de um determinado processo, todos eles conduzindo a cargas superiores às necessárias para deformar o material na prática. Destes campos, o mais adequado será o que conduza ao menor limite superior. A carga real corresponderá ao campo verdadeiro; no entanto, este é geralmente desconhecido em todos os seus detalhes e características e, para efeito de cálculo, deve ser idealizado ou simplificado. Neste método será permitido que as condições de equilíbrio não sejam satisfeitas. Deve-se destacar também que o teorema do limite superior, da forma como será empregado, aplica-se a materiais que não se encruam; por isto, trabalha-se sempre com valores médios das tensões de escoamento.

O método do limite superior é particularmente útil em aplicações práticas da conformação mecânica, pois permite calcular cargas que são, pelo menos, suficientes para realizar a operação desejada. A utilização deste método será ilustrada calculando-se a pressão de extrusão  $p$ , num processo de

extrusão plana sem atrito, com uma redução de 50% na área transversal, como representado esquematicamente na Figura 5.3. Desde que o estado de deformação seja plano, se analisará somente o que ocorre no plano de deformação, pois esta situação é uniforme no sentido da largura  $w$ . A análise a ser efetuada em seguida está idealizada, e o problema será estudado posteriormente em condições mais realistas.

Supõe-se que a geometria final será alcançada da seguinte forma: a zona na qual a deformação ocorre está limitada pelos triângulos AOB e A'O'B (Figura 5.4a) e o material só se deforma quando atravessa os lados dos triângulos, comportando-se como rígido durante o movimento entre eles. Observar que a geometria de fluxo escolhida prevê a existência de regiões com velocidade absoluta nula denominada “zonas mortas”. O metal a ser deformado é empurrado para dentro da máquina de extrusão por um pistão (Figura 5.3), aplicando-se uma pressão  $p$ , que se deseja calcular. Um elemento do metal movendo-se para a matriz traslada-se com uma trajetória (velocidade) paralela ao eixo (linha  $\Gamma$ ). Na Figura 5.4b serão analisadas as sucessivas alterações em sua velocidade, através de um diagrama vetorial denominado hodógrafa.

Antes de alcançar a linha AB (ou A'B), sua velocidade  $\bar{v}$  será considerada unitária (ramo  $\bar{O}a$  da hodógrafa). Ao cruzar a linha  $\overline{AB}$ , o elemento experimenta uma descontinuidade em sua velocidade, paralela a  $\overline{AB}$  (ramo  $\bar{a}b$  na hodógrafa). A velocidade resultante dentro do triângulo AOB deverá ser paralela à borda da zona morta  $\overline{AO}$ . Isso porque a componente normal da velocidade não pode variar e ela é nula na zona morta. Assim a reta  $\overline{Ob}$  é traçada a partir de O e paralela a  $\overline{OA}$ ; ela intercepta em b a reta paralela a  $\overline{AB}$  que passa por a. Dessa forma, encontra-se graficamente o valor da descontinuidade na velocidade existente em  $\overline{AB}$ , dada pelo segmento  $\bar{a}b$ .

Finalmente, o elemento sofre nova alteração em sua velocidade ao atravessar o lado  $\overline{OB}$ , paralela à direção de  $\overline{OB}$ . Assim, por  $b$  traça-se uma reta paralela a  $\overline{OB}$ , e, como a velocidade final deverá ser paralela ao eixo, tem-se em  $\overline{Oc}$  o valor da velocidade resultante. É fácil verificar que  $\bar{v}_f = 2\bar{v}_i$ , como impõe a equação de continuidade.

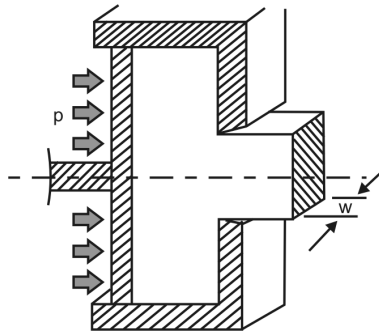


Figura 5.3 - Esquema de extrusão plana

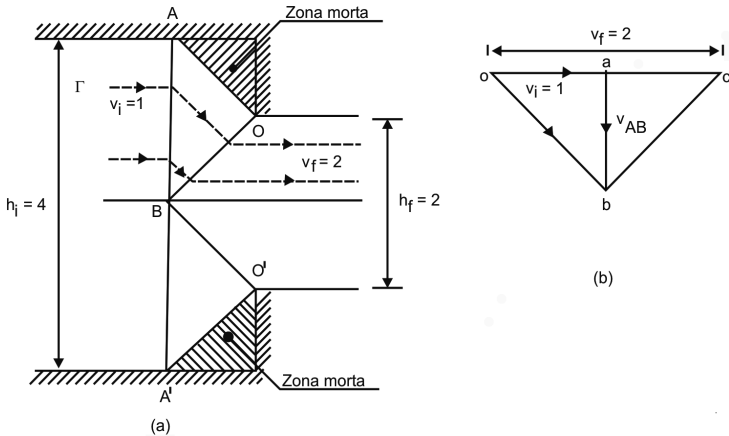


Figura 5.4 - Campo de velocidades de diagrama de velocidades (hodógrafa) na extrusão plana

Será analisada agora a potência consumida durante este processo. Sobre a linha onde existe uma descontinuidade na velocidade, a tensão de cisalhamento produzida, supondo um material que não se encrua, é  $k$  (tensão de escoamento por cisalhamento do material). Correspondentemente, se o comprimento da linha é  $s_j$  e a largura da tira  $w$ , a força que atua nesse plano é:

$$F_j = k s_j w$$

Se a descontinuidade na velocidade neste plano é  $v_j$ , a potência despendida por esta força é:

$$N_j = F_j v_j = k s_j v_j w$$

Se existem várias regiões com descontinuidades na velocidade, a potência total interna despendida será:

$$N_{int} = \sum_j N_j = k w \sum_j s_j v_j \quad (5.12)$$

Se não existem outras fontes de dissipação, esta potência será igual à aplicada externamente:

$$N_{int} = N_{ext}$$

A expressão (5.12) será aplicada ao problema de extrusão anterior, cuja hodógrafa já foi obtida. Desta forma resulta, analisando apenas a metade superior por razões de simetria:

$$N_{int} = k w \left[ \overline{A} \overline{B} v_{AB} + \overline{O} \overline{B} v_{OB} + \overline{A} \overline{O} v_{AO} \right] \quad (5.13)$$

Estes valores podem ser obtidos analiticamente ou medidos no gráfico. Eles são:

$$v_{AB} = 1 \quad \overline{AB} = 2,0$$

$$v_{AO} = \sqrt{2} \quad \overline{AO} = \sqrt{2}$$

$$v_{OB} = \sqrt{2} \quad \overline{OB} = \sqrt{2}$$

Substituindo em (5.13), obtém-se:

$$N_{int} = k w \left[ 1 \cdot 2,0 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \right] = 6 k_2 w \quad (5.14)$$

Se a pressão de extrusão é  $p$  e a área do pistão  $\overline{AB}w$ , a força aplicada externamente é:

$$F_{\text{ext}} = p \overline{AB}w$$

Se a velocidade de deslocamento do pistão é unitária, a potência fornecida externamente será:

$$N_{\text{ext}} = F_{\text{ext}} \cdot 1 = p \overline{AB}w \cdot 1$$

Como  $\overline{AB} = 2,0$  resulta

$$N_{\text{ext}} = 2pw \quad (5.15)$$

Igualando (5.14) e (5.15), obtém-se:

$$2pw = 6.w.k$$

ou seja:  $p = 3k$

$$\text{ou ainda: } \frac{p}{2k} = 1,5$$

As soluções calculadas através do teorema do limite superior estão sempre acima dos valores reais. Estes valores se aproximam dos reais à medida que o campo escolhido se aproxima do verdadeiro. Posteriormente serão indicadas soluções de limite superior para outros processos de conformação.

## 5.5 - Outros métodos

Outros métodos têm sido empregados, com resultados satisfatórios, no cálculo de esforços e na obtenção de linhas de fluxo. Entre eles serão mencionados o campo de linhas de escorregamento (*slip lines field*), a visioelasticidade(\*), os elementos finitos e os resíduos ponderados. O emprego destes métodos requer uma elaboração matemática prévia, cujo alcance escapa ao objetivo deste trabalho.

\* Visioelasticidade: termo usualmente empregado pelos profissionais da área para designar a técnica experimental que mede a deformação plástica efetiva nos diversos pontos de uma peça deformada, através da inscrição de uma grade na seção longitudinal da peça e da medida dos deslocamentos dos pontos desta grade provocados pela deformação plástica.

# 7 - FORJAMENTO

## 7.1 - A operação e o equipamento

O forjamento de um metal consiste em deformá-lo por martelamento ou prensagem. É, possivelmente, a mais antiga operação de conformação mecânica, praticada pelos ferreiros com martelos e bigornas. Normalmente o forjamento é realizado a quente, mas recentemente tem sido executado também a frio.

Matrizes são as peças, usualmente de aço-ferramenta, que entram em contato com o metal durante o forjamento. A operação de forjamento é classificada em forjamento em matrizes abertas e em matrizes fechadas. No caso do forjamento em matrizes abertas, a restrição ao movimento lateral do metal sendo comprimido é pequena, e as matrizes têm geometria bastante simples, como ilustrada na Figura 7.1.

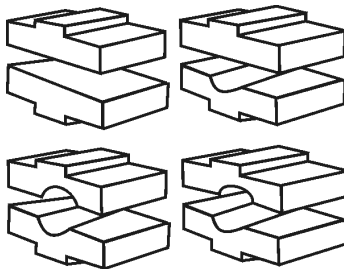


Figura 7.1 - Exemplos de matrizes para forjamento em matriz aberta

No forjamento em matrizes fechadas, o metal deve adotar a forma esculpida previamente nas duas matrizes, havendo fortes restrições ao livre espalhamento do material. A Figura 7.2 mostra uma operação deste tipo.

O forjamento em matrizes abertas é usado normalmente quando o número de peças a produzir é relativamente pequeno e o tamanho delas é grande (eixos de turbinas e de navios, grandes virabrequins e anéis, etc.). A Figura 7.3 ilustra o forjamento de anéis: a peça é aquecida e colocada em um mandril, como mostrado; em seguida, a matriz superior comprime uma parte do anel, ocorrendo uma diminuição de espessura e conseqüente aumento do comprimento desta parte, o que causa um acréscimo no diâmetro do anel. Após esta compressão, a matriz superior é levantada e a peça girada um pouco, forjando-se uma região adjacente à já processada. Esta operação é repetida até que todo o anel tenha sido forjado.

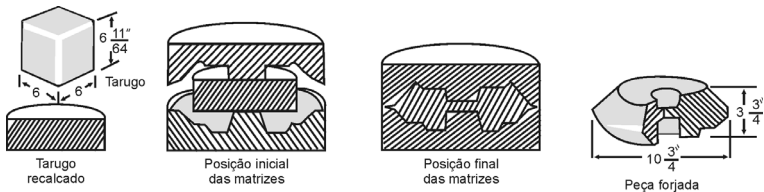


Figura 7.2 - Forjamento de uma peça em uma matriz fechada

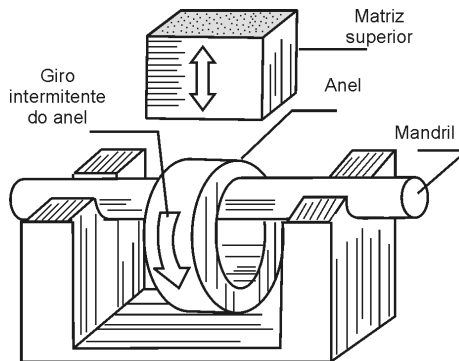


Figura 7.3 - Forjamento de um anel em matriz aberta

A Figura 7.4 ilustra o estiramento de uma parte de uma barra, que é uma operação comumente realizada com matrizes abertas. A primeira etapa do processo fornece a peça mostrada na Figura 7.4b. A operação é realizada com matrizes de largura  $b$  não muito grande e através de sucessivas compressões e avanços da barra (Figura 7.4c, d, e). As ondulações na superfície da peça ocorrem devido à pequena largura  $b$ . A Figura 7.4f mostra o aspecto da peça quando se repetem as operações já discutidas após um giro de  $90^\circ$  da barra. Finalmente, alisam-se as faces forjadas, trocando-se as matrizes por outras de maior largura  $b$ . A peça obtida está mostrada na Figura 7.4g.

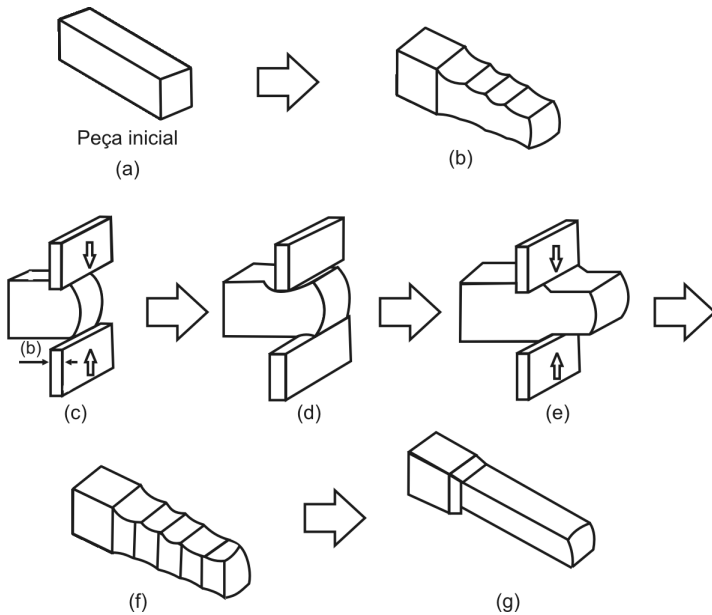


Figura 7.4 - Estiramento da ponta de uma barra por forjamento em matrizes abertas

O forjamento em matrizes fechadas não é feito de uma só vez: usinam-se diversas cavidades em matrizes, e a peça vai sendo sucessivamente forjada nessas cavidades, chegando gradualmente até sua forma final. A Figura 7.5 ilustra um



exemplo deste caso. A Figura 7.6 mostra dois exemplos de matrizes para forjamento em matrizes fechadas. Usualmente, usinam-se várias cavidades na mesma matriz, que recebem o nome de impressões. Aquelas utilizadas nas etapas iniciais do forjamento são as impressões preparadoras, e as que fornecem a forma final da peça são as acabadoras. Estas operações de usinagem são difíceis e caras e, por isso, só se justificam na fabricação de um grande número de peças.

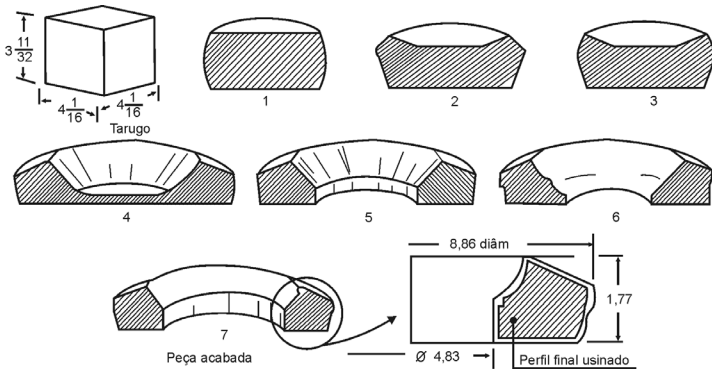


Figura 7.5 - Seqüência de fabricação no forjamento em matrizes fechadas

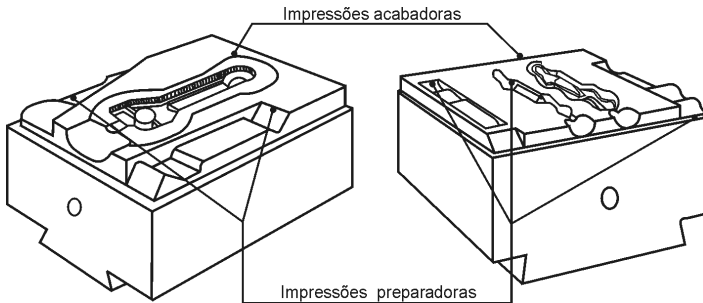


Figura 7.6 - Exemplos de matrizes para forjamento em matrizes fechadas

Um problema a ser considerado no processo de forjamento em matrizes fechadas é a formação de rebarba, constituída pelo excesso de material que penetra entre as matrizes durante a operação, como mostrado na Figura 7.7. Uma vez

pronta a peça, é necessária uma operação de rebarbação para a retirada deste excesso de metal. As matrizes podem ser dotadas de “calhas”, como ilustrado na Figura 7.8, para evitar que a rebarba seja muito extensa.

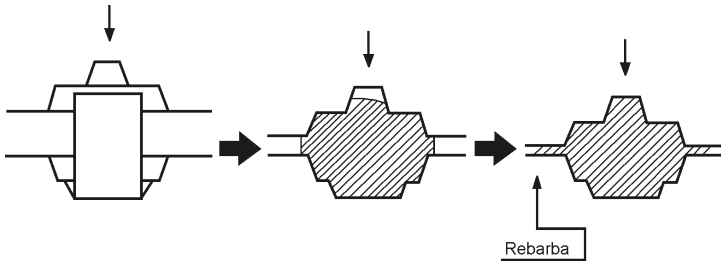


Figura 7.7 - Formação de rebarbas durante o forjamento em matrizes fechadas

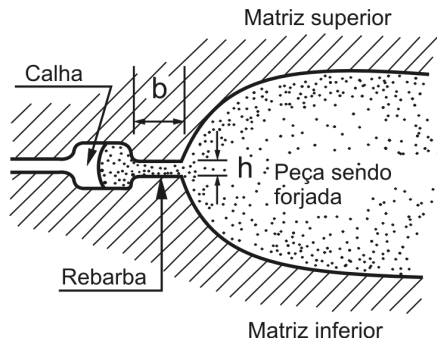


Figura 7.8 - Calha para evitar a extensão exagerada da rebarba

Deve-se notar a extrema importância da boa seleção e tratamento térmico do material a ser usado nas matrizes de forjamento. O assunto, no entanto, foge ao escopo do presente texto e não será aqui abordado.

O estudo de forjamento em matrizes fechadas é complexo e eminentemente empírico, como ocorre no projeto das matrizes. Este livro restringe-se ao estudo de alguns tópicos do forjamento em matrizes abertas, particularmente no tocante aos aspectos desta operação que se assemelham à laminação.

Os equipamentos universalmente usados no forjamento são o martelo e a prensa. Nos martelos, a energia necessária para executar uma operação é fornecida por uma massa que cai livremente ou impulsionada de uma certa altura. Esta massa está na faixa de 200 a 3 500 kg, caindo de alturas de 1 m a 3,5 m. Os métodos mais comuns de levantamento dessas massas ocorrem através de fricção em tábuas (Figura 7.9) ou por meio de ar comprimido. Fabricam-se peças de até 50 kg nesse tipo de máquina. Nos martelos pneumáticos (*power*

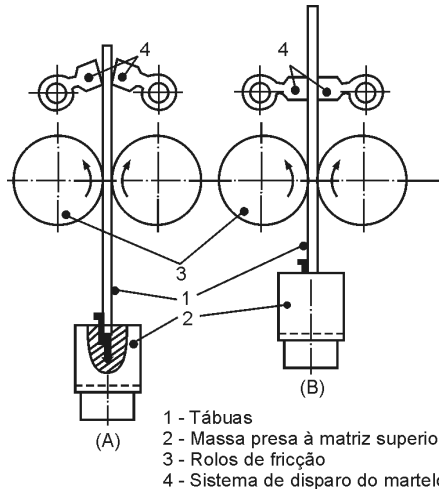


Figura 7.9 - Funcionamento esquemático de um martelo de tábuas. Posição abaixada (a) e levantada (b)

*hammers*), a massa que cai é impulsionada por ar comprimido. A capacidade de forjamento deste equipamento é muito superior ao dos martelos de queda livre, além de ter controle mais fácil, mas exige uma bigorna com uma grande massa. A Figura 7.10 mostra um martelo a ar comprimido.

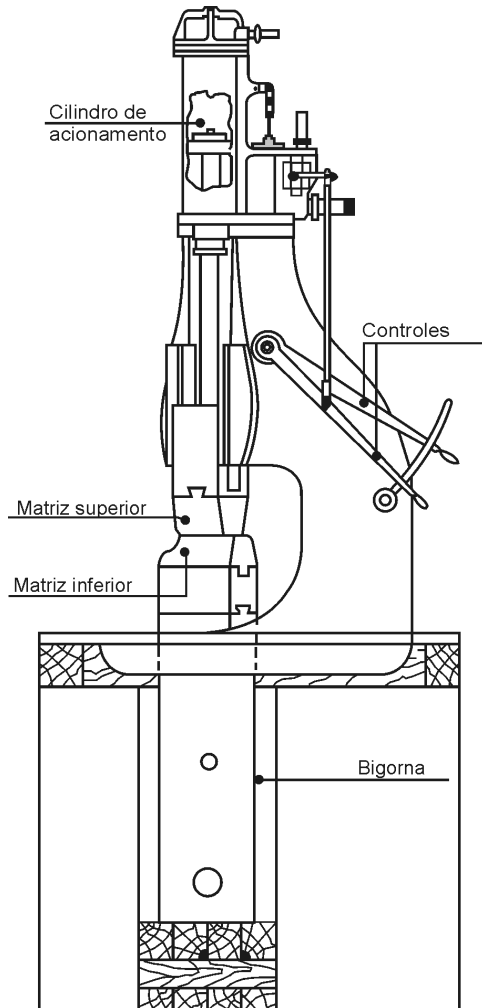


Figura 7.10 - Esquema de um martelo de forja e ar comprimido

As prensas utilizadas no forjamento podem ter acionamento mecânico ou hidráulico. As prensas mecânicas são acionadas por excêntricos, e têm capacidade máxima de aplicação de carga de 100 a 8 000 t. Seu curso é usualmente limitado. As prensas hidráulicas são acionadas por pistões hidráulicos e podem ter grande curso. Elas são fabricadas com capacidade de aplicação de carga de 300 a 50 000 t, e são consideravelmente mais caras que as prensas mecânicas.

Além dos martelos e prensas, outros equipamentos de forja também são empregados, para fins mais específicos. A seguir apresenta-se uma descrição breve de alguns destes equipamentos, a título de ilustração.

Uma máquina bastante empregada no forjamento de barras é a recalçadora (*upsetter* ou *header*). A Figura 7.11 mostra um esquema das partes principais desse equipamento, cujo funcionamento é descrito a seguir. Inicialmente, coloca-se uma barra, de comprimento adequado, na posição 1 da matriz estacionária. Então o mecanismo articulado é acionado, deslocando-se na direção da seta e fechando a matriz móvel sobre a estacionária. Assim, a barra fica presa na posição 1. As ferramentas recalçadoras movem-se na direção da seta, recalçando a cabeça da barra. As matrizes e ferramentas voltam então à sua posição original, permitindo ao operador passar a barra da posição 1 para a 2. Repete-se então o ciclo até que a peça esteja pronta. A Figura 7.12 mostra um exemplo de uma peça fabricada em 4 etapas através desse método. Para maior clareza, a matriz móvel não é mostrada, e as ferramentas recalçadoras estão desenhadas no final da sua operação de compressão.

Uma outra operação interessante é o forjamento rotativo (rotary swaging), que pode ser realizado a quente ou a frio. Entre outras aplicações, é largamente empregado no aponta-

mento preliminar de barras, tubos e arames que sofrerão tre-filação. A Figura 7.13 ilustra o princípio de funcionamento da máquina: tem-se uma gaiola de rolos fixa, dentro da qual gira, a alta velocidade, um porta-matrizes. Essa peça tem um eixo, onde duas matrizes podem mover-se radialmente. Quando em contato com os rolos (posição fechada), as matrizes encostam-se uma na outra, formando um canal cônico perpendicular ao plano do papel. O giro do porta-matrizes permite que as matrizes penetrem entre os dois rolos, abrindo-as (posição aberta). Tem-se, assim, uma sucessão de golpes sobre uma barra colocada entre as matrizes, e que vai tendo sua seção reduzida ao ser alimentada em direção à parte de menor diâmetro do furo cônico.

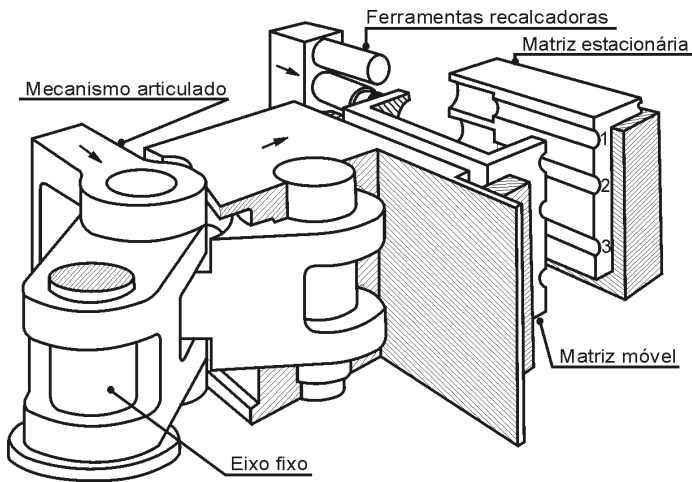


Figura 7.11 - Esquema de funcionamento de uma recalçadora

Recentemente têm sido construídos martelos que desenvolvem altas energias (*High Energy Rate Forging* - HERF), onde um pistão é acelerado por gases sob alta pressão, movimentando consigo uma matriz de forjamento.

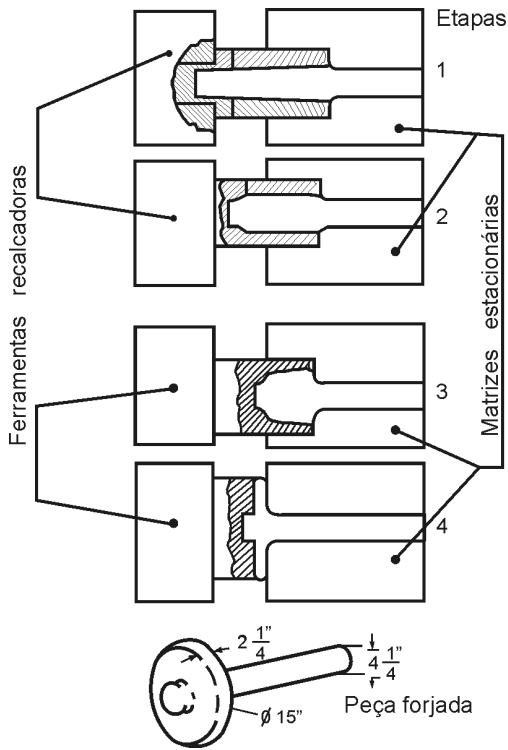


Figura 7.12 - Etapas de fabricação de peça típica de uma recalçadora

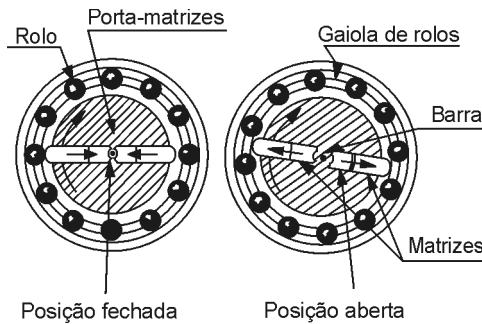


Figura 7.13 - Princípio de funcionamento de uma máquina de forjamento rotativo

## 7.2 - A deformação do metal no estiramento por forjamento - tensões induzidas

O estiramento de uma peça por forjamento em matrizes abertas já foi discutido anteriormente, e está apresentado esquematicamente na Figura 7.14.

Durante o forjamento, o material tende a deslizar com relação às matrizes, e o atrito na interface metal/ferramenta gera tensões que se opõem ao movimento em pauta. A Figura 7.15 mostra a situação para a face 1 da Figura 7.14. As tensões de atrito mostradas opõem-se ao estiramento (aumento de comprimento) da peça.

O mesmo fenômeno está presente ao longo da largura do material sendo forjado. Nesse caso o atrito se opõe ao alargamento da peça. À medida que a relação  $w_i/h_i$  cresce, o processo ocorre de forma cada vez mais semelhante ao estado plano de deformações (vide Capítulo 2, Figura 2.7), e o material fora da região de deformação também tende a evitar o alargamento acima citado.

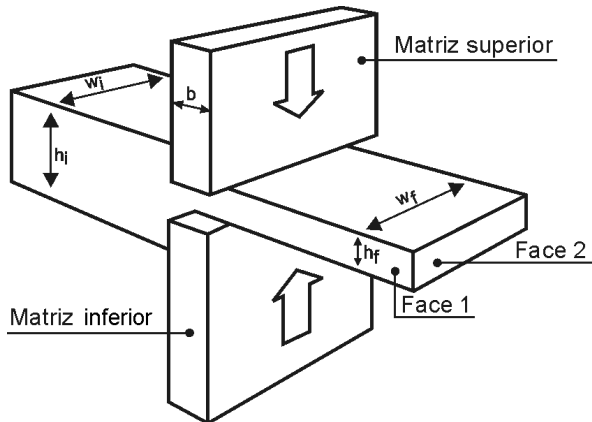


Figura 7.14 - Estiramento de uma barra por forjamento



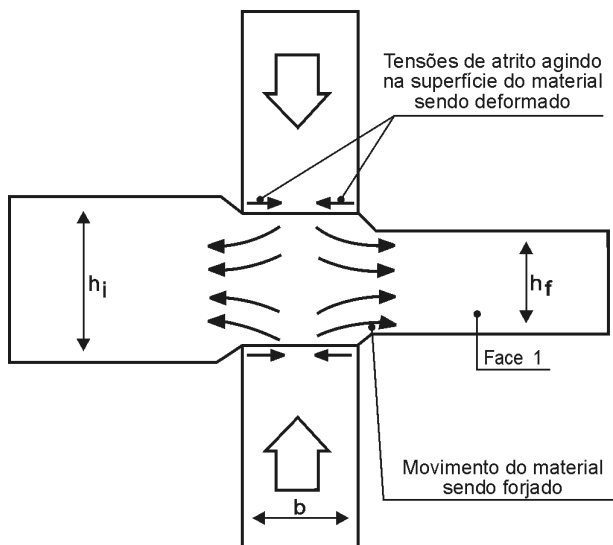


Figura 7.15 - Forças de atrito geradas na superfície da peça sendo forjada

Verifica-se experimentalmente e prevê-se teoricamente (como será visto neste capítulo) que as pressões verticais agindo sobre a peça sendo forjada crescem das bordas para o centro da matriz, tanto ao longo de sua largura  $b$  como ao longo da largura  $w$  da peça em processamento. Considerando o modelo coulombiano (vide Capítulo 3) para as tensões de atrito, conclui-se que estas também terão comportamento análogo ao descrito acima para as pressões verticais. Assim, a restrição ao movimento relativo metal/matriz deverá ser maior no centro das larguras  $b$  e  $w$ , e a tensão de atrito será nula nas bordas da matriz. Além disso, quanto maiores forem as dimensões  $b$  e  $w$ , maiores serão as tensões de atrito no centro destas dimensões. Estas tensões dependem também da fricção e lubrificação na interface em estudo.

No caso de fluidos ideais, a pressão aplicada em um ponto do fluido se transmite integralmente a todos os pontos da massa fluida. Este não é o caso dos sólidos, onde o efeito

de uma pressão aplicada em um ponto não se propaga por todo o corpo. Assim, o efeito da tensão de fricção agindo por exemplo nos pontos A e B da Figura 7.16 não se transmite ao longo de toda a altura da peça, mas vai desaparecendo à medida que se consideram maiores profundidades desde a superfície do metal em contato com a matriz. Quanto maior o valor das tensões aplicadas, mais profundo o seu efeito, o qual, no entanto, não penetra indefinidamente no metal. No caso do atrito, ocorre também uma limitação ao valor máximo desta tensão, que corresponde à tensão de escoamento por cisalhamento puro (vide Capítulo 3). Assim, deve-se esperar que no ponto B, a ação da tensão de atrito seja mais profunda que no ponto A, como ilustrado na Figura 7.17. Criam-se, desse modo, regiões abaixo das matrizes onde o fluxo do metal fica restringido pela ação do atrito. A existência destas regiões é comprovada experimentalmente. Como era de se esperar, a deformação do metal dentro delas é menor que em suas vizinhanças.

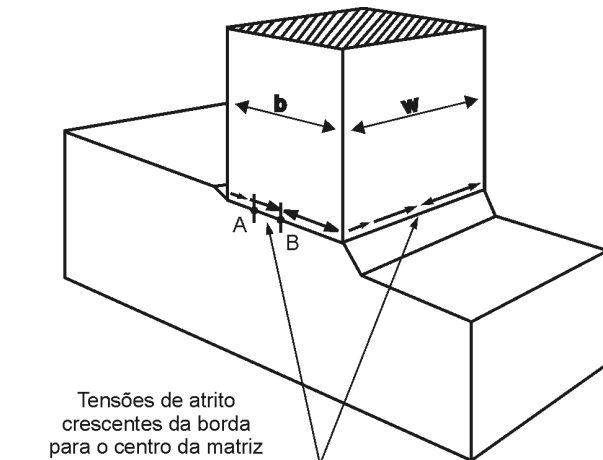


Figura 7.16 - Variação da tensão de fricção ao longo das dimensões da matriz superior

Considerando o exposto até o momento no tocante à face 1 (Figura 7.17), a fração do volume sendo deformado que é afetada pelo atrito dependerá da largura  $b$  das matrizes e da altura  $h$ . Para matrizes estreitas ( $b$  pequeno), o tamanho das regiões de fluxo restringido é menor, e a fração citada, ocupada por elas será menor à medida que  $h$  cresce. Uma indicação da influência do atrito seria então dada por  $b/h$ . Quanto menor esta relação, menor o efeito causado pelas regiões de fluxo restringido.

Do ponto de vista do atrito, o mesmo poderia ser dito para os fenômenos ocorrendo ao longo de  $w$ , e a influência da região de fluxo restringido seria comandada por  $w/h$  no tocante à face 2. No caso de altas relações  $w_i/h_i$ , porém, intervem um estado plano de deformações, e o papel do atrito ao longo de  $w$  fica restrito mais às bordas da peça.

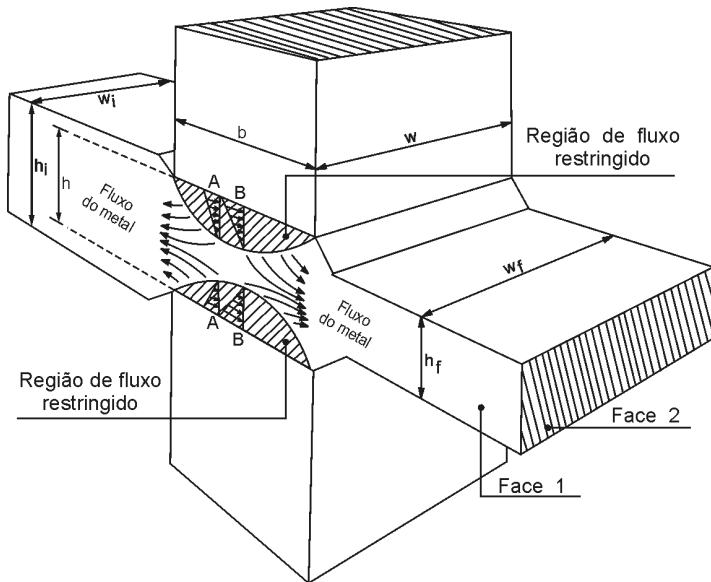


Figura 7.17 - Penetração do efeito do atrito em uma peça sendo estirada por forjamento

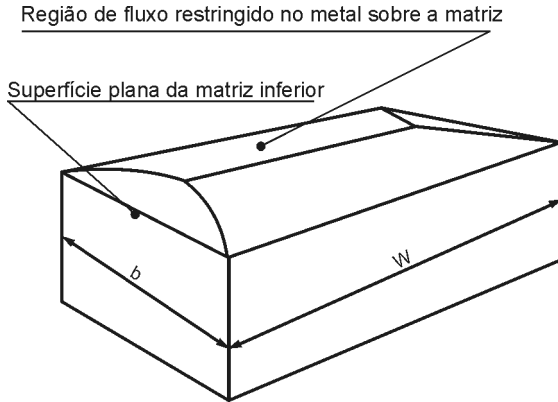


Figura 7.18 - Esquema de uma possível forma para a região de fluxo restringido considerada a fricção ao longo de  $b$  e  $w$  na matriz

Quando se considera o efeito conjunto da restrição ao fluxo ao longo das faces 1 e 2, conclui-se que a região de fluxo restringido seria como mostrado esquematicamente na Figura 7.18, para a região do metal próxima à matriz inferior de forjamento. O aspecto apresentado é característico para razões  $w/b > 1$ . Para relações  $w/b = 1$ , a região seria semelhante a uma pirâmide de base quadrada, e, se  $w/b < 1$ , o aspecto seria o mesmo daquele apontado na Figura 7.18, só que girado de  $90^\circ$ . No caso de forjamento de discos, a tensão de atrito estaria dirigida radialmente em direção ao eixo do disco, e a região em pauta teria a forma de um cone cuja geratriz não seria necessariamente reta. A fração do volume deformado, ocupado pelas regiões de fluxo restringido, seria avaliada neste caso através da razão  $D/h$ , onde  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $h$  a sua altura.

Na ausência de atrito não ocorreria a formação das regiões discutidas, e verifica-se experimentalmente que, para cilindros com relação  $D/h$  acima de 0,65, a forma externa da peça não é alterada pela compressão: um cilindro comprimido ainda teria a forma cilíndrica ao final da operação. A presença do atrito e de conseqüentes regiões de fluxo restringido altera radicalmente

o panorama, pois estas regiões são mais difíceis de deformar que o material à sua volta, agindo assim como “falsas matrizes”. Considerando a compressão de um disco, na parte próxima de uma região de fluxo restringido a deformação seria como mostrado na Figura 7.19, ocorrendo a formação de “bojos” perto da região em contato com a matriz.

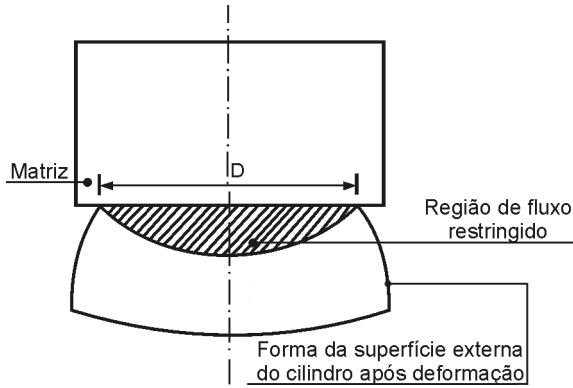


Figura 7.19 - Efeito da região de fluxo restringido sobre a forma externa de um cilindro sendo comprimido

O efeito da pressão vertical agindo sobre um cilindro alto ( $D/h$  menor que 0,65) não penetra indefinidamente ao longo da altura da peça. Conseqüentemente, a deformação obtida estaria restrita basicamente à região próxima da matriz. Quando se considera agora a ação simultânea da pressão vertical e das zonas de fluxo restringido, que atuam aproximadamente como matrizes, observa-se que, para valores de  $D/h$  baixos, o cilindro adotaria a forma mostrada na Figura 7.20a. À medida que  $D/h$  cresce, a fração de material ocupada pelas regiões de fluxo restringido cresce, e a altura efetiva do material comprimido entre as matrizes (aí consideradas as “falsas matrizes”) cai; como conseqüência, os bojos nas extremidades do cilindro aproximam-se, e o cilindro passa a ter o aspecto mostrado na Figura 7.20b. Então, à medida que  $D/h$

crece, a superfície lateral do cilindro passa de côncava a convexa. De acordo com a literatura, para aços deformados a quente o valor de  $D/h$ , que demarca a transição acima está em torno da faixa 0,6 - 0,7.

Considerando a Figura 7.20b durante a compressão, o material do plano A espalha-se mais que aquele no plano B. Essa diferença no espalhamento faz com que a região nas extremidades do cilindro tente limitar a deformação em A, aplicando ali uma tensão de compressão (Figura 7.21a). Obviamente que a região A tende a arrastar consigo a região B, que fica então tracionada (Figura 7.21a). O raciocínio é também válido para os bojos nas extremidades do cilindro da Figura 7.20a, induzindo um sistema de tensões ilustrado na Figura 7.21b.

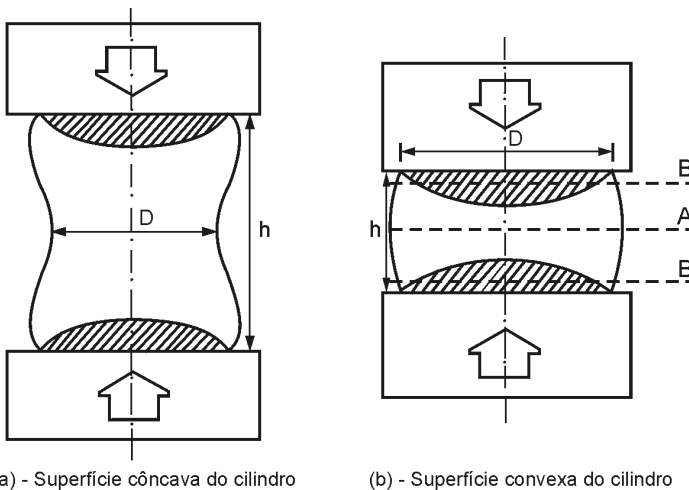


Figura 7.20 - Aspectos da superfície lateral de cilindros de diferentes relações  $D/h$ , após compressão

Às tensões ilustradas na Figura 7.21, devem superpor-se as tensões de compressão externas e aquelas geradas pelo atrito e já discutidas (Figura 7.17). Como analisado no Capítulo 4, a componente hidrostática do estado de tensões é de gran-

de importância na abertura de defeitos na fratura dúctil, que é característica das fraturas durante a conformação. No caso da Figura 7.21a, as tensões de compressão verticais propagam-se até o centro da peça, havendo aí predominância de uma componente hidrostática de compressão. Eventuais defeitos nesta região tenderiam a fechar-se. Já para a Figura 7.21b, as tensões de compressão verticais não atingem a região central do corpo, e a componente hidrostática do estado de tensões nesta região passa a ser de tração, podendo provocar aí a abertura de defeitos. Na verdade, este é o princípio empregado para propiciar a abertura de núcleos de tarugos no processo Mannesmann de fabricação de tubos sem costura.

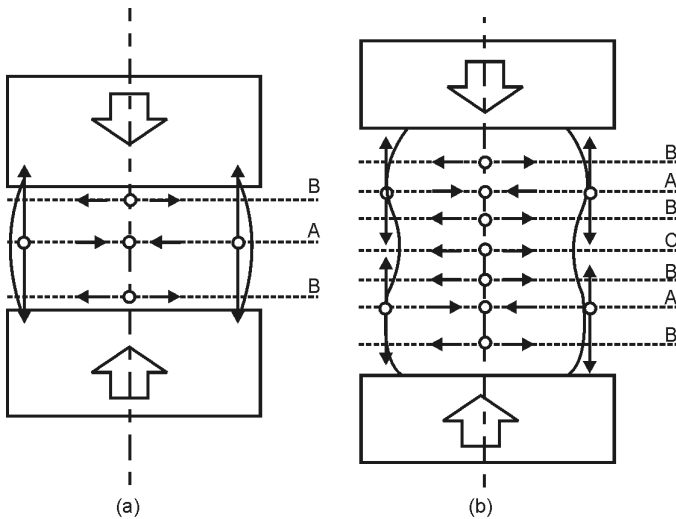


Figura 7.21 - Tensões horizontais induzidas durante a compressão de cilindros

As tensões verticais mostradas nos planos A da Figura 7.21 são menos evidentes e normalmente só estão presentes para um bojamento pronunciado. A Figura 7.22, que mostra um corte de um cilindro composto por discos, antes e após sua compressão, indica claramente a presença das tensões em

pauta, e que podem causar trincas ao longo da periferia do cilindro. O problema é mais grave para altas reduções de altura do cilindro, que provocam grande convexidade da superfície externa dos cilindros.

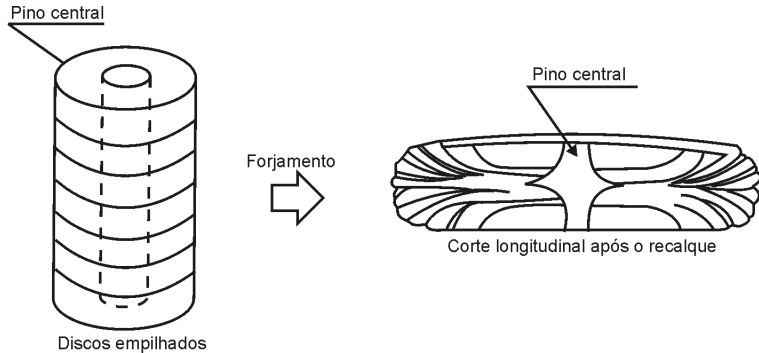


Figura 7.22 - Aspecto após compressão de um cilindro composto por discos

Considerando o volume sendo comprimido em um dado instante, no caso do estiramento, podem desenvolver-se situações similares às mostradas na Figura 7.21. Quando  $w_i/h_i = 1$ , a literatura indica que, para razões  $b/h_i$  menores do que 0,6, a deformação é maior nas regiões perto das matrizes que no centro da espessura da peça. A situação assemelha-se ao caso da Figura 7.21b, e desenvolvem-se tensões de tração na região central do volume sob compressão. Quando a relação  $b/h$  cresce, tudo se passa de forma similar à Figura 7.21a, e predominam tensões de compressão no centro da peça. Quando  $w_i/h_i$  cresce, cai o valor de  $b/h_i$  abaixo do qual se têm tensões de tração. Baixos valores de  $b/h_i$  e  $w_i/h_i$  levariam à maior incidência de defeitos internos no forjamento, o que é comprovado experimentalmente. Esse fato tem levado à adoção de altos valores para  $b$ , o que aumenta a área de contato entre a matriz e o metal e exige o uso de prensas de grande capaci-



dade. Dessa forma, se encontram prensas hidráulicas de até 50 000 toneladas de capacidade. Normalmente, deve-se ter  $b/h_1 > 1/3$  para se evitar problemas de defeitos internos. Além das tensões discutidas anteriormente, outras tensões são induzidas na face lateral do tarugo (Face 1, Figura 7.17), devido à variação ao longo de  $w$  das tensões de atrito e da tensão  $\sigma_2$  que mantém o estado plano de deformações (vide seção 2.4.3, item Processamento em estado plano de deformação). Essas tensões são nulas nas bordas da peça, e crescem em direção ao centro da dimensão  $w$ . Isso significa que faixas ao longo das bordas das peças (vide regiões hachuradas, Figura 7.23a) estarão relativamente livres para aumentar sua largura. Este processo acontecerá até que  $\sigma_2$  e as tensões de atrito atinjam magnitude suficiente para impedir o movimento de metal na direção  $w$ . A região central da peça sendo processada (Faixa branca central, face 3, Figura 7.23a) não alarga e, assim, sofre um certo alongamento, causado pela operação de estiramento. Como as faixas hachuradas se alargam um pouco, para o mesmo estiramento seu comprimento de-

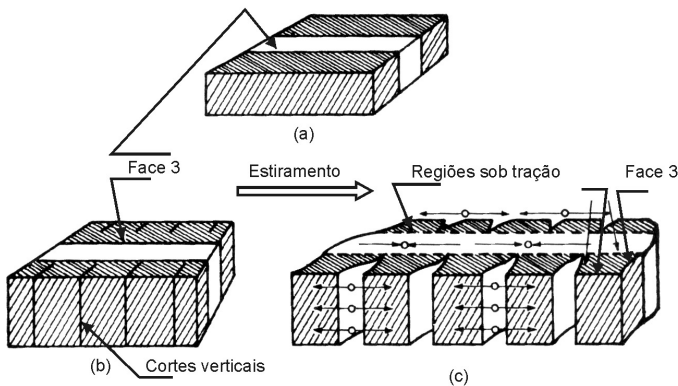


Figura 7.23 - Tensões geradas nas faces laterais do tarugo pela diferença de atrito ao longo das dimensões das matrizes

verá ser um pouco menor que a região central. A interação dessas regiões de comportamento diferente provoca o aparecimento de tensões de tração nas áreas hachuradas e de compressão no ponto central.

Assim, quando se estira por forjamento um bloco com cortes em suas laterais (Figura 7.23b), ele apresentará a forma final mostrada na Figura 7.23c, e as tensões de tração nas laterais abrirão os cortes preexistentes. Quanto menor for a relação  $b/w$  e maior a relação  $w/h$ , mais efetiva será a ação do atrito e de  $\sigma_y$ , e os efeitos acima ficarão mais restritos às bordas da peça sendo estirada (vide exercício 7.1). Quando se forja uma peça integral, as tensões nas suas bordas não serão aliviadas pelos cortes laterais, e poderão ocorrer rupturas nas laterais da peça (Face 1).

Finalmente, recomenda-se que se mantenha  $h_i/h_f$  abaixo de 1,3 para evitar que o material se dobre sobre si mesmo durante o forjamento.

Quando as reduções percentuais de altura  $(h_i - h_f)/h_i$  são altas, em condições de  $b/h_i$  tais que os perfis das faces 1 e 2 (Figura 7.17) sejam convexas, as tensões verticais que causam as aberturas ilustradas na Figura 7.22 podem promover trincas longitudinais ao longo da face 1, e mesmo a abertura em “jacaré” na face 2. Esses fenômenos são idênticos à abertura de trincas horizontais no cilindro da Figura 7.22.

### **7.3 - Cálculo de esforços no forjamento no estado plano de deformações e no forjamento de cilindros**

#### **7.3.1 - A influência das zonas de fluxo restringido sobre o esforço necessário para a compressão de cilindros e para o estiramento por forjamento**

Como analisado na seção 7.2, o atrito leva à formação de regiões de fluxo restringido, que agem como “falsas matri-

zes”. Logo, verifica-se experimentalmente que, para relações  $D/h$  altas (acima de 1,2), a forma de cilindros recalcados é relativamente pouco bojada, predominando no volume da peça as regiões de fluxo restringido. O recalçamento obriga o material a fluir radialmente, e, quanto mais alta a relação  $D/h$  e o coeficiente de atrito  $\mu$ , mais difícil é o fluxo radial e maior será a pressão necessária ao forjamento. Comumente, denomina-se este aumento aparente de resistência de “endurecimento geométrico”.

À medida que  $D/h$  cai abaixo de 1,2, as peças cilíndricas podem assumir formas convexas (Figura 7.20b) ou mesmo côncavas (Figura 7.20a). A forma adotada pelos cilindros corresponde a uma minimização do esforço externo, ou seja, caso não ocorressem as formas acima mencionadas, a pressão de forjamento seria maior. Assim sendo, à medida que  $D/h$  diminui, além da queda do efeito da fricção, deve-se considerar uma diminuição de pressão devido à deformação heterogênea dos cilindros.

A Figura 7.24 mostra a variação experimental da carga para deformar cilindros de razão  $D/h$  variável. No caso da Figura 7.24a, varia-se  $D$  e no caso da Figura 7.24b, varia-se  $h$ . As previsões no parágrafo anterior são plenamente confirmadas: para a mesma redução percentual de altura, quanto menor a razão  $D/h$ , menos esforço exigirá a compressão.

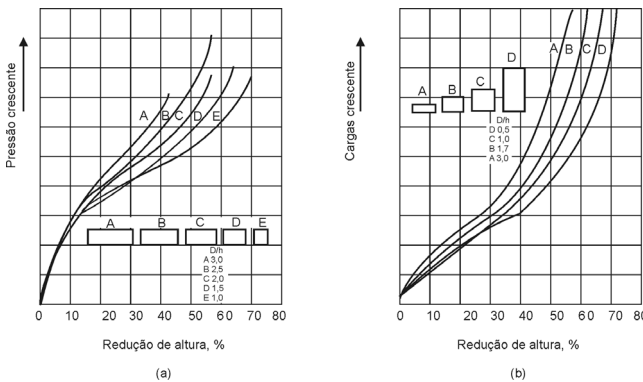


Figura 7.24 - Influência da relação  $D/h$  sobre o esforço necessário para executar a operação

No tocante ao papel do atrito, a Figura 7.25 também confirma as previsões realizadas (no caso tem-se  $D/h$  constante e maior do que 1,2). Finalmente a Figura 7.26 demonstra que, quando  $\mu$  cai, os efeitos do “endurecimento geométrico” tendem a desaparecer.

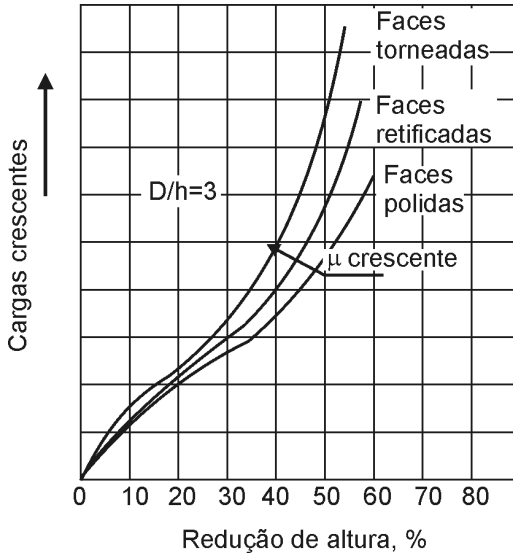


Figura 7.25 - Efeito do atrito sobre o esforço necessário à compressão de um cilindro. A variação do efeito do atrito é obtida através de diferentes condições superficiais das faces dos corpos de prova em contato com a matriz

Experiências semelhantes às discutidas acima para cilindros também são realizadas para o estiramento por forjamento, e as conclusões são inteiramente análogas. Os resultados são também válidos para o estiramento em estado plano de deformações (Figura 2.7). Neste caso, o parâmetro geométrico de importância será a razão da largura da matriz para a altura da peça ( $b/h$ ), já que  $w/h$  não deverá influir.

No caso de formação de rebarbas durante o forjamento em matrizes fechadas, é interessante manter um valor de  $b/h$

(Figura 7.8) suficientemente alto entre as matrizes, para que a pressão no seu interior seja suficiente para forçar o preenchimento da cavidade entre as matrizes.

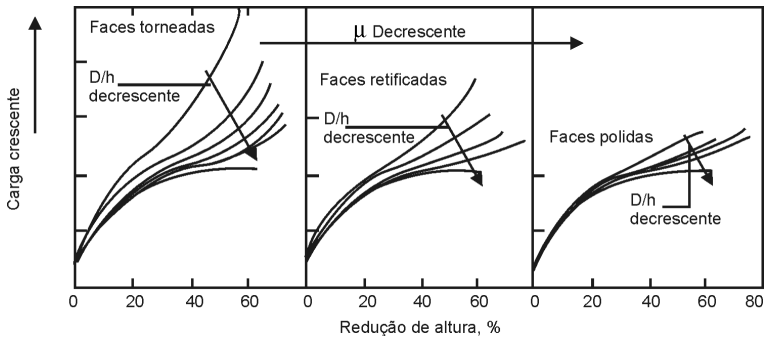


Figura 7.26 - Diminuição do efeito do “endurecimento geométrico” à medida que o atrito diminui

### 7.3.2 - Cálculo do esforço necessário para estirar por forjamento no estado plano de deformações

De acordo com o método dos blocos (Capítulo 5), será isolado um bloco de material como ilustrado na Figura 7.27. A sua distância ao eixo de simetria da matriz será  $x$ , positiva em direção à borda da matriz. A espessura do elemento é  $dx$ , e a largura na direção perpendicular ao plano da folha de papel é  $w$ . Aplicam-se agora ao elemento as tensões agindo sobre ele: a pressão vertical  $p$ , a tensão de atrito  $\tau$  e a tensão  $\sigma_x$ , que pode variar ao longo de  $x$ . Não se sabe a priori se  $d\sigma_x$  será negativo ou positivo.

Tomando o equilíbrio das forças na direção de  $\sigma_x$ , virá:

$$(\sigma_x + d\sigma_x) hw + 2 \tau w dx - \sigma_x hw = 0 \quad (7.1)$$

equação esta válida somente para  $x > 0$ , já que, para  $x < 0$ , a direção de  $\tau$  inverte-se e o termo  $2 \tau w dx$  deveria ser negativo.

Aceitando o modelo coulombiano para o atrito metal/ferramenta, vale

$$\tau = \mu p \tag{7.2}$$

onde  $p$  é a pressão agindo no bloco.

Levando a equação (7.2) em (7.1) e dividindo por  $w$ , virá:

$$\sigma_x h + d\sigma_x h + 2 \mu p dx - \sigma_x h = 0$$

Dividindo membro a membro por  $h$ , virá

$$d\sigma_x + \frac{2\mu p dx}{h} = 0 \tag{7.3}$$

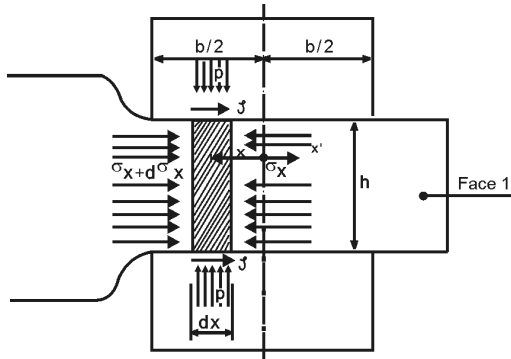


Figura 7.27 - Bloco isolado no forjamento no estado plano

Para o caso do estado plano de deformação, o critério de escoamento de von Mises leva à seguinte expressão, como visto no Capítulo 2:

$$p - \sigma_x = 1,155 Y = S \tag{7.4}$$

Admitindo  $S$  constante, chega-se a

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= dp \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{2\mu}{h} dx \end{aligned} \quad (7.5)$$

que, integrada, fornece

$$\ln p = -\frac{2\mu}{h} x + C \quad (7.6)$$

sendo  $C$  uma constante de integração, a ser determinada por alguma condição de contorno. Por exemplo, na borda da matriz ( $x = b/2$ ), a tensão  $\sigma_x$  será nula, e, de acordo com a equação (7.4), a pressão  $p$  deverá ser igual a  $S$ . Levando estas condições de contorno em (7.6), virá

$$\begin{aligned} \ln S &= -\frac{2\mu}{h} \cdot \frac{b}{2} + C, \text{ ou seja,} \\ C &= \ln S + \frac{\mu}{h} \cdot b \end{aligned}$$

A expressão (7.6) pode ser escrita como

$$\ln p = -\frac{2\mu}{h} x + \ln S + \frac{\mu b}{h}$$

ou seja

$$\ln \frac{p}{S} = \frac{2\mu}{h} \left( \frac{b}{2} - x \right)$$

ou, finalmente,

$$p(x) = S e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{b}{2} - x \right)} \quad (7.7)$$

que fornece a variação da pressão  $p$  com a distância  $x$ , desde  $x = 0$  até  $x = b/2$ . Esta equação não vale para  $x < 0$ , pois baseia-se na equação (7.1), válida somente para  $x \geq 0$ .

Conclui-se, a partir da equação (7.7), que a pressão  $p$  apresenta um máximo no centro da matriz ( $x = 0$ ), dado por

$$p_{\text{máx}} = p(x = 0) = S e^{\frac{\mu b}{h}} \quad (7.8)$$

e um mínimo na borda ( $x = b/2$ ), dado por

$$p_{\text{min}} = p(x = b/2) = S \quad (7.9)$$

Da equação (7.4), conclui-se que:

$$\sigma_x(x) = p(x) - S$$

No centro da matriz ( $x = 0$ ), tem-se que

$$\sigma_x(x = 0) = p(x = 0) - S = S e^{\frac{\mu b}{h}} - S = S \left( e^{\frac{\mu b}{h}} - 1 \right) \quad (7.10)$$

Enquanto, na borda ( $x = b/2$ ),

$$\sigma_x \left( x = \frac{b}{2} \right) = p \left( x = \frac{b}{2} \right) - S = S - S = 0 \quad (7.11)$$

A Figura 7.28 ilustra os resultados obtidos: para cada ponto de coordenada  $x$  (por exemplo, o ponto A), vale a relação

$$p(x) = S + \sigma_x(x)$$

derivada da equação (7.4).

Mostra-se, ainda, a situação para o centro da matriz ( $x = 0$ ) e para a borda ( $x = b/2$ ). Caso se tivesse tomado como positiva a direção  $x'$  na Figura 7.27, seriam obtidos os mesmos resultados, o que explica a simetria da curva de  $p(x)$  em torno do eixo  $AA'$ , na Figura 7.28.



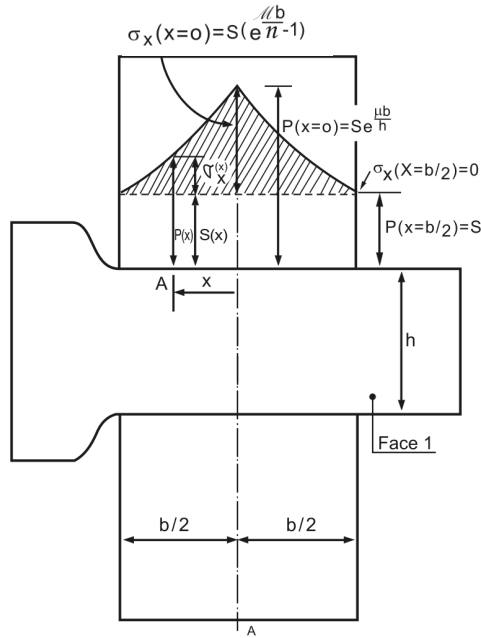


Figura 7.28 - Distribuição de pressões ao longo da largura da matriz

No caso de ausência de atrito ( $\mu = 0$ ), obtém-se da expressão (7.7) que a pressão  $p(x)$  seria constante e igual a  $S$  ao longo da superfície matriz/metal. A região hachurada na Figura 7.28 corresponde à influência de  $\sigma_x$ , ou seja, à influência do atrito, e, devido a isso, a curva mostrada é comumente denominada “colina de fricção”. Como já mencionado anteriormente, aceitando o modelo coulombiano para a tensão de atrito, esta crescerá da borda para o centro, uma vez que as pressões verticais também têm esse comportamento.

No caso de deformação em estado plano de deformação, é comum supor que o papel do atrito ao longo da dimensão  $w$  da matriz (Figura 7.16) é desprezível, pois o material adjacente ao que está sendo comprimido seria responsável pela ausência de movimento relativo na direção  $w$  entre a matriz e o metal. Nesse caso, não haveria uma “colina de fricção” ao

longo de  $w$ , e a distribuição de pressão sobre a interface metal/matriz teria o aspecto mostrado na Figura 7.29.

A carga total ( $P$ ) para executar a operação é dada por

$$P = \int_{-b/2}^{b/2} p(x)w dx = w \int_{-b/2}^{b/2} p(x) dx$$

Considerando-se a simetria da distribuição de pressão sobre a peça e a expressão  $p(x)$ , obtém-se:

$$P = 2w \int_0^{b/2} S e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{b}{2} - x \right)} dx = \frac{Sw}{\frac{\mu}{h}} \left( e^{\frac{\mu b}{h}} - 1 \right) \quad (7.12)$$

Observando a Figura 7.29 e a equação 7.12, conclui-se que a carga total é dada pelo produto da largura  $w$  pela área sob a colina de fricção. Esta área dependerá basicamente do valor máximo de  $p(x)$  (expressão 7.8), desde que nas bordas da matriz,  $p(x)$  depende exclusivamente do escoamento do material em estado plano de deformação, como na expressão (7.9).

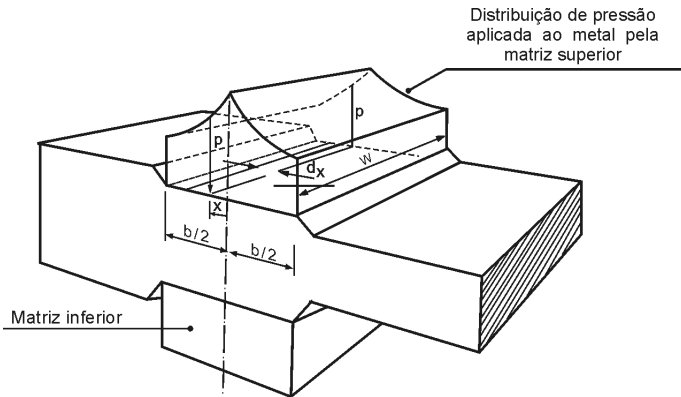


Figura 7.29 - Distribuição de pressão no estiramento em estado plano de deformação

Da expressão (7.10), deduz-se que, quanto mais alto o valor de  $\mu b/h$ , maior será  $p(x)$  no centro da matriz, e a área sob a colina. O valor de  $P$  (equação 7.12) igualmente será maior. Esse resultado está qualitativamente de acordo com as previsões da seção 7.3.1. Além disso, os resultados quantitativos obtidos a partir da equação (7.12) são razoáveis.

Define-se pressão média ( $\bar{p}$ ) agindo sobre a interface metal/matriz como a carga total ( $P$ ), obtida a partir da equação (7.12), dividida pela área da interface em pauta ( $b \cdot w$ ). Seu valor é o seguinte:

$$\bar{p} = \frac{P}{bw} = \frac{S}{\frac{\mu b}{h}} \left( e^{\frac{\mu b}{h}} - 1 \right) \quad (7.13)$$

Desenvolvendo-se em série de potências, em torno do valor  $\frac{\mu b}{h} = 0$ , a exponencial da equação (7.12)\*, a equação (7.13) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\bar{p} \cong S \frac{1}{\frac{\mu b}{h}} \left( 1 + \frac{\mu b}{h} + \frac{\mu^2 b^2}{2h^2} - 1 \right)$$

ou

$$\bar{p} \cong S' \left( 1 + \frac{\mu b}{2h} \right) = S' \quad (7.14)$$

Como  $S' > S$ , pois  $\mu b/2h > 0$ , isto significa que o efeito da fricção sobre a pressão necessária para deformar um metal com

(\*) Lembrando este desenvolvimento, tem-se:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

fricção é equivalente à necessária para deformar sem fricção um metal mais duro (tensão de escoamento  $S' > S$ ). Se  $\mu \neq 0$ ,  $S'$  cresce à medida que  $b/h$  evolui; em outras palavras, há um “endurecimento geométrico”, como exposto na seção 7.3.1.

Uma vez conhecido ( $\bar{p}$ ), a força para forjar o metal está dada por

$$P = \bar{p} bw \quad (7.15)$$

Toda a análise acima exposta, através do método dos blocos, é válida para o caso em que a hipótese de constância de  $\sigma_x$ , ao longo de toda a altura  $h$  (Figura 7.27) é razoável. Isso não é verdade para relações  $b/h$  menores que 1. Neste caso, deve-se adotar uma abordagem através do método das linhas de deslizamento (slip line field theory), ou por meio da teoria do limite superior, que será aqui estudada.

### 7.3.3 - Cálculo do esforço no forjamento no estado plano através da teoria do limite superior

A Figura 7.30 mostra um campo de velocidades cinematicamente admissível para o forjamento no estado plano de deformações. A linha tracejada mostra a trajetória das partículas durante o processamento. Considerando a geometria do campo, tem-se que

$$CD = CB = BA \frac{EF}{\cos\theta} \quad (7.16)$$

Seguindo um raciocínio análogo ao desenvolvido na seção 5.4 (Capítulo 5), pode-se estabelecer a hodógrafa mostrada na Figura 7.31. A partir desta hodógrafa, conclui-se que:

$$V_{CD} = V_{CB} = V_{BA} = \frac{V_0}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} \quad (7.17)$$

Se a largura da chapa é  $w = 1$ , a potência externa necessária para executar a operação por uma das matrizes será:

$$W_{\text{ext}} = p \cdot b \cdot w = p \cdot b \quad (7.18)$$

onde  $p$  é a pressão aplicada pela matriz.

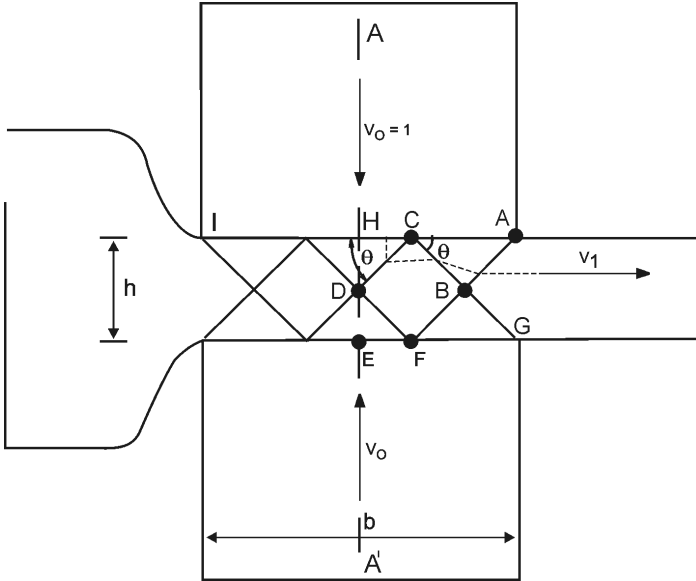


Figura 7.30 - Uma solução para o problema de forjamento em estado plano

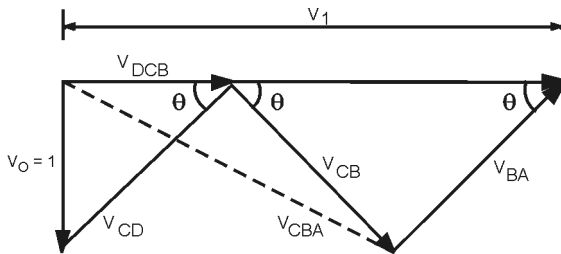


Figura 7.31 - Hodógrafa para a situação da Figura 7.30

A potência dissipada em todas as linhas onde existem descontinuidades de velocidade será dada por (aceitando atrito nulo na interface metal/matriz):

$$W_{\text{int}} = 2 [ k_{DC} V_{CD} + k_{CB} V_{CB} + k_{AB} V_{BA} ]$$

onde o fator 2 está ligado à consideração dos trechos HA e HI (Figura 7.30), já que as descontinuidades de velocidades ocorrem de ambos os lados do eixo AA'. Nesta equação,  $k$  é a tensão de escoamento do material sob cisalhamento puro.

Considerando-se as equações (7.16) e (7.17), tem-se que

$$W_{\text{int}} = k \frac{6EF}{\cos\theta \sin\theta} = k \frac{b}{\cos\theta \sin\theta} \quad (7.19)$$

Igualando-se as expressões (7.18) e (7.19):

$$P = \frac{k}{\cos\theta \sin\theta} = \frac{2k}{\sin 2\theta}$$

ou

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{\sin 2\theta} \quad (7.20)$$

Esta solução foi encontrada para o caso da Figura 7.30, onde se consideram um campo de velocidades com três regiões do tipo ACFG (com linhas de descontinuidade de velocidade formando um "X"). O problema poderia ser abordado com qualquer número inteiro (1, 2, 3, ...) dessas regiões, encontrando-se sempre a equação 7.20 como solução.

Para o caso da Figura 7.30, a razão  $p/2k$  será mínima quando  $\theta = 45^\circ$ , ou seja, quando  $b/h = 3$ . Se  $b$  é diminuído, com  $h$  constante, o ângulo  $\theta$  aumentará, e a relação  $p/2k$  subirá (Figura 7.32). Quando se adotam duas regiões ACGF, a razão  $p/2k$  será mínima quando  $\theta = 45^\circ$ , ou seja,  $b/h = 2$ . Quando se aumenta  $b$ , a pressão subirá, até encontrar o valor da pressão para três regiões ACGF (ponto B, Figura 7.32); daí por diante, é mais fácil a deformação com três regiões,

pois, quando  $b$  cresce, há uma queda em  $p/2k$ , até  $b/h = 3$ , subindo novamente até o ponto C.

Quando  $b/h$  cai abaixo de 2, a pressão também aumenta até atingir a curva para uma só região do tipo ACGF (ponto A, Figura 7.32). A partir daí, predomina a nova curva, que cai até um mínimo em  $b/h = 1$ . A diminuição de  $b/h$  provoca aumentos em  $p/2k$  até que a deformação não penetre ao longo de toda a altura  $h$ , assemelhando-se a um ensaio de dureza. Isso ocorre para  $b/h$  em torno de 0,125, e, abaixo deste valor, a pressão fica constante (vide detalhe na Figura 7.32).

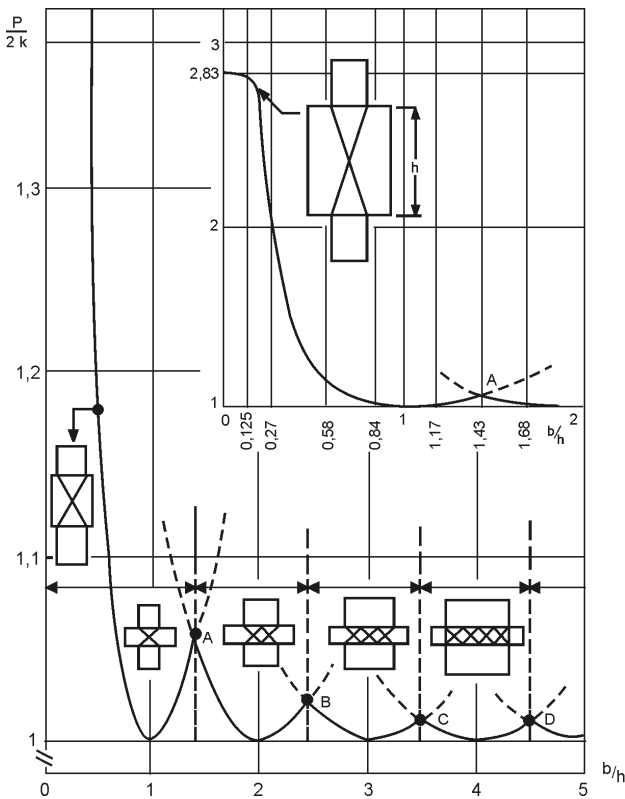


Figura 7.32 - Variação da relação  $p/2k$  com  $b/h$ , no forjamento em estado plano de formação, com atrito nulo

Para  $b/h$  menor que 1, o atrito tem pouca influência sobre as cargas necessárias à execução da operação, e a pressão para forjar seria calculada pela curva ascendente a partir de  $b/h = 1$ , e que é aproximadamente dada por

$$p = \bar{S} \left( 0,8 + 0,2 \cdot \frac{h}{b} \right) \quad (7.21)$$

Para  $b/h$  menor que 0,11, a pressão torna-se aproximadamente constante. É igual a cerca de 2,6 , de acordo com previsões da teoria do campo de linhas de deslizamento.

O valor de 2,83, fornecido na Figura 7.32, é obtido a partir de um campo de velocidades formado por linhas retas, o que não mais é suficientemente correto para  $b/h < 0,125$ .

Para  $b/h$  maior que 1, a influência da maneira como o material se deforma é relativamente pouco importante (os picos A, B, C, D, da Figura 7.32 são bastante baixos), e ocorre o predomínio do atrito. Nessa região, deve-se adotar o método dos blocos, já exposto (seção 7.3.2).

Lembramos que o modelo é aplicado para materiais sem encruamento ( $k$  constante), imaginando-se que a deformação só ocorre ao longo das linhas limite do campo de velocidade, se considerando o material como rígido nas regiões entre elas.

### 7.3.4 - Cálculo do esforço necessário para forjar um disco

Utilizando novamente o método dos blocos para o caso em pauta, e levando em conta um critério de escoamento (Tresca, por exemplo), chega-se à seguinte equação:

$$p(r) = Y e^{\frac{2\mu}{h} \left( \frac{D}{2} - r \right)} \quad (7.22)$$

onde  $D$  – diâmetro do cilindro

$h$  – altura do cilindro

$\mu$  – coeficiente de atrito na interface metal/matriz

$Y$  – limite de escoamento do metal sob compressão simples



$r$  – distância de um ponto do cilindro até seu eixo

$p(r)$  – pressão na interface metal/matriz, à distância  $r$  do eixo do cilindro

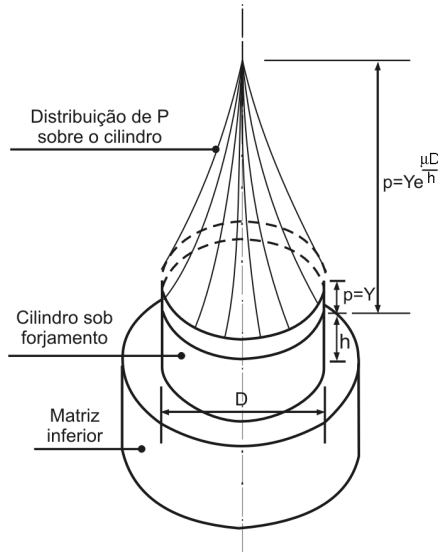


Figura 7.33 - Distribuição de pressões sobre um cilindro sob forjamento

É digna de nota a semelhança entre as equações (7.22) e (7.7). A distribuição de pressão sobre o cilindro está mostrada na Figura 7.33. A parte cilíndrica dessa distribuição representa o esforço para deformar o cilindro sob atrito nulo, enquanto a cônica está ligada ao esforço para vencer o atrito existente matriz/metal.

A carga total necessária para deformar a peça será dada por:

$$P = \int_0^{D/2} p(r) 2\pi r dr = \int_0^{D/2} Ye^{\frac{2\mu(D-r)}{h}} 2\pi r dr$$

ou

$$P = \frac{\pi Y D^2}{2} \left[ \left( \frac{h}{\mu D} \right)^2 \left( e^{\frac{\mu D}{h}} - 1 \right) - \frac{h}{\mu D} \right] \quad (7.23)$$

Define-se aqui, também, a pressão média ( $\bar{p}$ ) como a carga total (P) para executar o forjamento dividido pela área de contato metal/matriz.

Tem-se, assim que

$$\bar{p} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

Considerando-se a equação (7.23), chega-se a:

$$\bar{p} = 2Y \left[ \left( \frac{h}{\mu D} \right)^2 \left( e^{\frac{\mu D}{h}} - 1 \right) - \frac{h}{\mu D} \right] \quad (7.24)$$

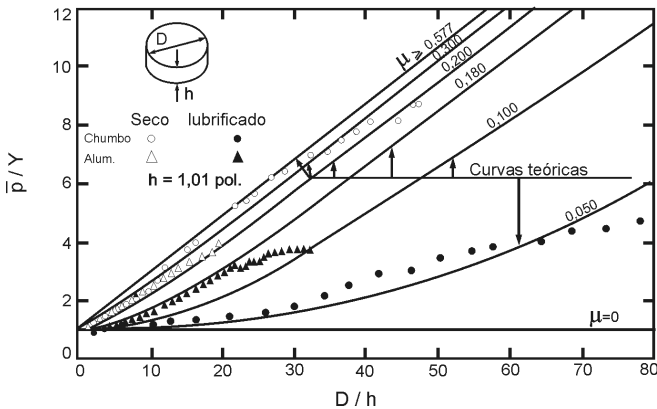


Figura 7.34 - Verificação experimental das previsões do esforço necessário para forjar discos

Desenvolvendo em série de potência a função exponencial até o termo de terceiro grau e substituindo na equação (7.24), chega-se à equação aproximada:

$$\bar{p} \cong Y \left[ 1 + \frac{\mu D}{3h} \right] \quad (7.25)$$

expressão esta válida somente para valores de  $\mu D/h$  pequenos ( $\mu D/h \lesssim 1$ ).

De acordo com a equação (7.24), a pressão média  $e$ , conseqüentemente, a carga de forjamento ( $P$ ) crescem com a relação  $\mu D/h$ , qualitativamente de acordo com o previsto na seção 7.3.1.

Novamente, a abordagem mostrada é razoável somente para valores de  $D/h$  maiores do que 0,65, pois abaixo desse patamar a suposição de constância de  $\sigma_x$ , ao longo da altura  $h$  do cilindro, (suposição esta inerente ao método dos blocos) torna-se excessivamente errônea.

A Figura 7.34 mostra, nas linhas cheias, curvas de  $\bar{p}/Y$  versus  $D/h$  para diversos valores de  $\mu$ . Essas linhas correspondem a valores obtidos através da equação (7.24). Os pontos experimentais obtidos pela compressão de cilindros de diferentes relações  $D/h$ , tanto de alumínio como de chumbo, lubrificados ou não, seguem bastante bem curvas correspondentes a estreitas faixas de coeficientes de atrito, exceto no caso do chumbo forjado sem lubrificação. Pode-se assim apreciar o bom desempenho quantitativo das equações propostas.

## Exercícios

7.1 - Com relação à Figura 7.17, propõe-se na literatura que  $(w_f/w_i) = (h_i/h_f)^s$ , onde  $s = (b/w_i)/(1 + b/w_i)$ . Considerando uma relação  $h_i/h_f$  de 1,2, montar um gráfico de  $w_f/w_i$  em função de  $b/w_i$  (variar  $b/w_i$  de 0,01 a 5). Como você poderia usar esse gráfico no projeto de uma operação industrial?

7.2 - Fazer uma curva completa de  $\bar{p}/S$ , para  $b/h$  variando de 0,05 a 10, com  $\mu = 0,2$ , no estiramento por forjamento no estado plano. Considerar os diferentes comportamentos de  $\bar{P}/S$  acima e abaixo de  $b/h = 1$ . Na região domi-

nada pelo atrito, utilizar a fórmula completa (equação 7.13) e a simplificada (equação 7.14) e comparar os resultados.

7.3 - Comparar as pressões médias para forjar um cilindro de  $h = 1$  cm e  $D = 5$  cm e outro de  $h = 0,3$  cm e  $D = 30$  cm; fazer os cálculos para  $\mu = 0,01, 0,1$  e  $0,3$ .

7.4 - Desenvolver uma expressão que forneça a colina de fricção para o forjamento no estado plano, com atrito de agarramento.

7.5 - No forjamento no estado plano de deformações, deduzir uma expressão que forneça a distância  $x^*$  do centro da matriz, na qual cessa o atrito de escorregamento (coulombiano) e inicia-se o de agarramento.

7.6 - Desenhar uma colina de fricção completa, supondo atrito de deslizamento para o seguinte caso de forjamento no estado plano de deformações:

$$b = 30 \text{ mm} \quad h = 4 \text{ mm} \quad \bar{S} = 40 \text{ MPa}, \quad \mu = 0,25.$$

7.7 - Levando em conta a transição discutida no problema 7.5, redesenhar a colina do problema (7.6) comparando os dois resultados (obs: para  $x = x^*$ , as expressões que fornecem a pressão, para atrito de deslizamento e para atrito de agarramento, devem dar o mesmo valor).

7.8 - Um disco de metal, de diâmetro 75 mm e espessura 15 mm, foi comprimido entre placas bem lubrificadas ( $\mu \cong 0$ ), enquanto outro disco idêntico foi comprimido entre placas rugosas. As forças medidas no ponto de escoamento foram 126 t no primeiro caso e 158 t no segundo. Admitindo deformação homogênea, determinar o coeficiente de atrito para placas rugosas.

7.9 - Considerando o forjamento sem fricção ( $\mu \cong 0$ ) de um metal elasticamente rígido ( $E = \infty$ ) e que não encrua (rígido, idealmente plástico), qual seria a altura final de um cilindro de altura inicial  $h_0$ , batido por uma massa  $m$  que cai de uma altura  $z$ ?

7.10 - Executa-se a operação abaixo, no estado plano de deformações. O material é elasticamente rígido ( $E = \infty$ ) e não encruável.  $S = 20 \text{ MPa}$  e  $\mu = 0,15$ . Fornecer a posição do ponto da interface metal/matriz que fica estacionária durante o forjamento (ponto neutro).

